UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Una aproximación a la noción de homotopía entre espacios topológicos finitos desde las funciones submodulares

Julián Armando Abril Luna

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de ciencias
Departamento de matemáticas
Bogotá D.C.
2015

Una aproximación a la noción de homotopía entre espacios topológicos finitos desde las funciones submodulares

Julián Armando Abril Luna

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en ciencias - Matemáticas

Director:
Profesor Humberto Sarria Zapata

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de ciencias
Departamento de matemáticas
Bogotá D.C.
2015

Resumen

En este trabajo se estudian las conexiones entre las FD relaciones con soporte finito y los preórdenes. Se demuestra que existe una correspondencia biunívoca entre las FD relaciones con soporte finito y los espacios pretopológicos finitos, y se aprovecha dicho vínculo para interpretar, en términos de las funciones submodulares, aquellos conceptos relacionados con la clasificación por tipo de homotopía de los espacios topológicos finitos: función continua, espacio conexo, espacio T_0 y beat points. Además, se presentan algoritmos que calculan los valores de algunas funciones submodulares relacionadas con espacios topológicos finitos y se interpreta el algoritmo de reducción de Stong [13] por medio de dichas funciones. Los resultados obtenidos se basan principalmente en [2], [4], [11] y [14].

Palabras clave: FD relación, pretopología, preorden, topología, función submodular, orden, beat point, diagrama de Hasse.

Abstract

In this work the connections between the FD relations with finite support and preorders are studied. We show that there is a one to one correspondence between the FD relations with finite support and pretopológicos finite spaces , and that link is used to interpret, in terms of functions submodulares those concepts related to homotopy type classification of finite topological spaces continuous function, connected space, space T_0 and beat points. Furthermore , algorithms that compute the values of some functions related submodulares finite topological spaces and Stong reduction algorithm [13] through interprets these functions are presented . The results are mainly based on [2], [4], [11] and [14].

Keywords: FD relation, pre-topology, preorder, topology, submodular function, order, beat point, Hasse diagram.

Contenido

Introducción

En 1937, Alexandroff [1] nota que existe una correspondencia biunívoca entre los espacios topológicos finitos y los conjuntos preordenados, además, muestra la correspondencia entre los espacios finitos T_0 y los *posets* finitos, develando su estructura combinatoria. En 1966, se retoma dicha idea, McCord [9] demuestra que todo espacio topológico finito, es homotópicamente equivalente a uno T_0, lo cual aprovecha Stong [13] en ese mismo año, pues descubre una técnica de *reducciones* sucesivas, la cual consiste, en eliminar o añadir ciertos puntos, a los que denomina como *puntos lineales* y *puntos colineales* de los espacios T_0, obteniendo en cada paso, un espacio con el mismo tipo homotópico que el anterior. Lo que implica, que para el estudio de equivalencias homotópicas en espacios finitos, basta estudiar aquellos que son T_0, identificando ciertos puntos especiales.

El método de Stong inspiró nuevos trabajos mucho más recientes, entre los que se destaca la tesis doctoral de Jonathan Barmak [2], quien, junto con Gabriel Minian, estudian los *métodos de reducción de un punto*, para abordar varias nociones en topología algebraica de espacios finitos. Por supuesto, el primer método de reducción de un punto es el de Stong. Usando la terminología actual introducida por J.P May en [8], Barmak y Minian se refieren a los puntos colineales y a los puntos lineales, como *up beat points* y *down beat points* respectivamente.

En un artículo de 1991 publicado por Frantisek Matús [4], se exhibe una conexión entre las relaciones de dependencia funcional (FD relaciones), los operadores de clausura y las funciones submodulares. Esta conexión fue estudiada por Raúl Varela en su trabajo [14], presentando a su vez, un vínculo entre las FD relaciones y los objetos definidos a partir de operadores de clausura. En particular, advirtió una conexión entre los espacios topológicos y las FD relaciones. Como continuación de dicho trabajo, Leonardo Roa en [11], caracteriza algunos conceptos y propiedades de espacios topológicos finitos mediante FD relaciones y funciones submodulares.

En este trabajo, se presentan los conceptos relacionados con el de clasificación por tipo homotópico, vía funciones submodulares, tomando como principales referencias los trabajos de Barmak, Varela y Roa. Por medio de las funciones submodulares, se caracterizan las nociones de función continua, espacio conexo, espacio T_0 y los beat points. En el camino, se demuestra que las FD relaciones y las pretopologías (estudiadas desde la perspectiva de Alberto Donado en [3]) son el mismo objeto, visto en contextos diferentes, observación que resulta esencial para el desarrollo del presente trabajo, cuyo contenido se resume a continuación:

En el capítulo 1, se presenta una introducción de las siguientes ideas: conexiones entre las *funciones submodulares*, las *FD relaciones* y los *operadores de clausura*, definiciones referentes a *espacios topológicos finitos*, principalmente su correspondencia con los *conjuntos preordenados* y por último, se dan las definiciones necesarias referentes con la *clasificación por tipo de homotopía* de espacios finitos.

En el capítulo 2, se muestra una correspondencia biunívoca entre las *pretopologías* que se definen en un conjunto finito (concepto introducido en [3]) y las FD relaciones que se pueden definir a partir del mismo conjunto, lo cual se hace aprovechando que las primeras se dan a partir de la definición de punto interior que da lugar al *operador de interior*, luego se describen algunas nociones pretopológicas desde las funciones submodulares, en particular, se estudia un teorema de McCord [9] en el contexto de las pretopologías y las FD relaciones.

En el capítulo 3, se describe la FD relación asociada a un espacio topológico finito. Además, se dan las ideas principales que se usan en [2], [8] y [13], para estudiar los tipos de homotopía, caracterizando los beat points y el algoritmo de reducción de Stong, por medio de funciones submodulares.

Los aportes de este documento son los siguientes:

- Se demuestra, que a partir de cualquier subconjunto de un conjunto finito dado, se puede construir una función submodular de valor entero, cuyo dominio es el conjunto de partes del segundo conjunto y cuenta el número de subconjuntos que no están contenidos en el primero.
- Se demuestra, que los espacios pretopológicos definidos sobre un conjunto finito, están en correspondencia biunívoca con las FD relaciones, cuyo soporte es el mismo conjunto.
- Se da una descripción de las FD relaciones asociadas a topologías, por medio de preórdenes.
- Se caracterizan las nociones topológicas de punto interior, conjunto abierto, espacio conexo, función continua, beat points y se da una descripción de los posets vía FD relaciones y funciones submodulares.
- Se presenta una propuesta del algoritmo de reducción de Stong, por medio de funciones submodulares.

Lista de símbolos

Símbolo	Descripción
E	Será reservada para denotar un conjunto finito.
$a_1a_2\ldots a_n$	Conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$
α	Pretopología.
τ	Topología.
τ^{op}	Topología opuesta.
$\mathcal{U}$	Base minimal de una topología.
$\mathcal{D}$	Base minimal de una topología opuesta.
A^{c}	Complemento de A.
$\lvert A\rvert$	Cardinal de A.
2^A	Partes de A.
A°	Interior de A
$\overline{A}$	Adherencia de A
$g[A]$	Imagen directa de A bajo una función g.
$\leq$	Relación de preorden o de orden parcial.
$<$	Preorden u orden estricto.
f_Δ	Función submodular de valor entero asociada a un conjunto Δ.
$\mathcal{N}$	FD relación.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo, se introducen las definiciones básicas y algunas nociones teóricas esenciales para la comprensión del trabajo. Aunque las demostraciones de algunas proposiciones no se exhiben, se dan las referencias bibliográficas para su consulta.

En la sección 1.1, se exponen las definiciones de función submodular y de FD relación, de igual manera, se presenta una conexión entre estos dos conceptos, tomada de [4]. En la sección 1.2, se da la definición de operador de clausura, ejemplos y relaciones con funciones submodulares. En la sección 1.3, se describe la noción de pretopología, de forma similar a lo hecho en [3]. Para cerrar el capítulo, en la sección 1.4 se presentan algunos resultados referentes a espacios topológicos finitos, en particular, se describen de topologías T_0, su representación gráfica por medio de diagramas de Hasse y se dan algunas definiciones referentes al concepto de homotopía en espacios finitos, las referencias para este tema son [2] y [12].

1.1. Funciones submodulares y FD relaciones

Definición 1.1. Una función $f : 2^E \longrightarrow \mathbb{R}$ es *submodular*, si cumple la condición

$$f(A \cup B) + f(A \cap B) \leq f(A) + f(B), \tag{1-1}$$

para cualquier pareja $A, B \subseteq E$.

La propiedad (1-1) se denomina *submodularidad*.

Además, se dice que f es *no decreciente*, si $A \subseteq B$ implica $f(A) \leq f(B)$.

Nótese que la suma de funciones submodulares, es una función submodular y el producto de un escalar no negativo por una función submodular también lo es. En consecuencia, el conjunto de las funciones submodulares conforman un cono convexo, véase [11].

A continuación, se dan ejemplos de funciones submodulares, en los que se denota el conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ por $a_1 a_2 \ldots a_n$.

Ejemplo 1.2.

1. *Si $J \subseteq E$, entonces, la función $q_J : 2^E \to \{0,1\}$ definida por:*

$$q_J(I) := \begin{cases} 1 & si \quad I \nsubseteq J \\ 0 & si \quad I \subseteq J, \end{cases}$$

es submodular. En efecto, sean A, $B \in 2^E$ y considérense los tres casos posibles para la suma $q_J(A) + q_J(B)$:

a) *Si $q_J(A) + q_J(B) = 0$, entonces $A, B \subseteq J$, luego $A \cup B \subseteq J$ y $A \cap B \subseteq J$, esto implica que*

$$q_J(A \cup B) + q_J(A \cap B) = 0.$$

b) *Si $q_J(A) + q_J(B) = 1$, entonces se puede suponer sin pérdida de generalidad, que $A \subseteq J$ y $B \nsubseteq J$. Luego $A \cup B \nsubseteq J$ y $A \cap B \subseteq A \subseteq J$, por lo tanto*

$$q_J(A \cup B) + q_J(A \cap B) = 1.$$

c) *Si $q_J(A) + q_J(B) = 2$, entonces $A, B \nsubseteq J$, luego $A \cup B \nsubseteq J$. Pero se puede dar que $A \cap B \subseteq J$ o $A \cap B \nsubseteq J$, así que*

$$q_J(A \cup B) + q_J(A \cap B) \in \{1, 2\}.$$

En cualquiera de los tres casos, q_J cumple la condición de submodularidad:

$$q_J(A \cup B) + q_J(A \cap B) \leq q_J(A) + q_J(B).$$

2. *La anterior función permite obtener otra, también submodular (con dominio 2^E), asociada a un conjunto cualquiera $\Delta \subseteq 2^E$, cuyo codominio es $\mathbb{Z}$. Para cada $I \subseteq E$, se define*

$$f_\Delta(I) := \sum_{J \in \Delta} q_J(I).$$

Obsérvese que f_Δ es una suma de funciones submodulares. Además es no decreciente, pues si $A \subseteq B \subseteq E$, entonces cualquier elemento en Δ que contenga a B, contendrá a A, esto implica que $q_J(A) \leq q_J(B)$ para todo $J \in \Delta$.

Nótese que, por la definición de q_J, $f_\Delta(I)$ es el número de elementos en Δ que no contienen a I.

3. *Considérese el conjunto abc y la función f que se define en la siguiente tabla:*

A	$\varnothing$	a	a	c	ab	ac	bc	abc
f(A)	0	4	2	2	4	4	3	4

Tabla 1-1

Puede verificarse rápidamente que f es submodular: por ejemplo, $ab \cap bc = b$ y $ab \cup bc = abc$, y por lo tanto,

$$f(abc) + f(b) = 6 \quad y \quad f(ab) + f(bc) = 8.$$

A continuación, se introducen ciertas estructuras conjuntistas denominadas FD relaciones, las cuales son muy importantes en la caracterización de nociones topológicas por medio de funciones submodulares.

Definición 1.3. Una FD relación $\mathcal{N}$ con soporte E, es un subconjunto de $2^E \times 2^E$ que satisface:

(FD1) Si $J \subseteq I$, *entonces* $(I,J) \in \mathcal{N}$,

(FD2) Si (I,J), $(J,K) \in \mathcal{N}$, *entonces* $(I,K) \in \mathcal{N}$,

(FD3) *Si* (I,J), $(I,K) \in \mathcal{N}$, *entonces* $(I, J \cup K) \in \mathcal{N}$.

Definición 1.4. Para cada $A \subseteq E$ y cada FD relación $\mathcal{N}$, se define el conjunto

$$\mathcal{N}(A) := \{J \in 2^E;\ (A,J) \in \mathcal{N}\}.$$

Esto es, el conjunto de elementos en 2^E relacionados con A en $\mathcal{N}$, como segundas componentes.

Este conjunto se introduce únicamente para simplificar la escritura de algunas definiciones y demostraciones que se hacen en este documento, sin embargo, en algunas ocasiones, en vez de escribir $J \in \mathcal{N}(I)$, se escribirá $(I,J) \in \mathcal{N}$.

A continuación se dan ejemplos de FD relaciones. Al igual que para funciones submodulares, se denotará el conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ por $a_1 a_2 \ldots a_n$.

Ejemplo 1.5. *Los siguientes conjuntos son ejemplos de FD relaciones:*

1. $\mathcal{N}_{|E|} = \{(I,J) \in 2^E \times 2^E\ ;\ J \subseteq I\ \}$. *Esto, debido a que la relación $\subseteq$ satisface los axiomas* ***(FD1), (FD2)*** *y* ***(FD3)***. *En este caso,*

$$\mathcal{N}(I) = 2^I \text{ para todo } I \in 2^E$$

2. $\mathcal{M}_1 = \mathcal{N}_{|abc|} \cup \{(a,\varnothing),(b,\varnothing),(ab,\varnothing),(a,b),(a,ab)\}$.

3. $\mathcal{M}_2 = \mathcal{N}_{|abc|} \cup \{(a,\varnothing),(b,\varnothing),(ab,\varnothing),(b,a),(b,ab)\}$.

En [4], Frantisek Matús muestra una forma natural de definir una FD relación, a partir de una función submodular no decreciente; su método se puede ver en la siguiente proposición.

Proposición 1.6. *Sea $f : 2^E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función submodular no decreciente. El conjunto*

$$\mathcal{N}_f = \{(I,J) \in 2^E \times 2^E;\ f(I) = f(I \cup J)\},$$

es una FD relación.

Demostración. Véase [11]. $\square$

En [11], se demuestra que existen infinitas funciones submodulares que inducen la misma FD relación $\mathcal{N}$. Además, se define el conjunto

$$\lambda(\mathcal{N}) = \{f;\ \mathcal{N}_f = \mathcal{N}\}, \tag{1-2}$$

de todas las funciones submodulares que inducen a $\mathcal{N}$.

1.2. Operadores de clausura

Definición 1.7. Una función $c : 2^E \to 2^E$ es un *operador de clausura* sobre E, si satisface:

(CL1) *Proyección:* $I \subseteq c(I)$, para cada $I \in 2^E$,

(CL2) *Monotonía:* si $J \subseteq I$, entonces $c(J) \subseteq c(I)$,

(CL3) *Idempotencia:* $c(c(I)) = c(I)$, para cada $I \in 2^E$.

Además, cada elemento del conjunto

$$\mathcal{C} := \{I \in 2^E;\ I = c(I)\},$$

se denomina conjunto cerrado en E según c.

Las proposiciones 1.8 y 1.9 que se presentan a continuación, muestran explícitamente que los operadores de clausura y las FD relaciones están en correspondencia biunívoca (véase [4] y [14]).

Proposición 1.8. *Sea $\mathcal{N}$ una FD relación. La función $c_{\mathcal{N}} : 2^E \to 2^E$ dada por*

$$c_{\mathcal{N}}(I) = \bigcup_{J \in \mathcal{N}(I)} J$$

es un operador de clausura.

Además, dado un operador de clausura c, el conjunto

$$\mathcal{N}_c = \{(I,J) \in 2^E \times 2^E; J \subseteq c(I)\}$$

es una FD relación.

Demostración. Véase [14]. □

Proposición 1.9. *Sean $\mathcal{N}$ una FD relación y $c : 2^E \to 2^E$ un operador de clausura. Entonces*

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_{c_{\mathcal{N}}} \quad y \quad c = c_{\mathcal{N}_c}$$

Demostración. Véase [14]. □

1.3. Espacios pretopológicos finitos

En esta sección se introduce la definición de espacio pretopológico, así como las nociones pretopológicas de: función continua, separación de un espacio pretopológico y espacio conexo, de manera similar a lo estudiado en [3].

Definición 1.10. Sean E un conjunto finito, $\alpha \subseteq 2^E$ y $A \in 2^E$.

1. Un elemento $a \in A$ se dice punto α-interior de A, si existe $U \in \alpha$ tal que $x \in U \subseteq A$.
2. El conjunto de todos los puntos α-interiores de A, se denomina el α-interior de A y se denota por A°.
3. A es un α-abierto, si $A = A^\circ$.
4. El conjunto de α-abiertos de E se denota por Λ_α, esto es

$$\Lambda_\alpha = \{A;\ A = A^\circ\}.$$

Nótese que, por la misma definición, $\alpha \subseteq \Lambda_\alpha$. Además, $\varnothing \in \Lambda_\alpha$. Pero en general, no es cierto que $E \in \Lambda_\alpha$, como se verá en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.11. *Considérense los conjuntos $E = \{a,b,c,d\}$ y*

$$\alpha = \{\varnothing, \{a,b\}, \{b,c\}\}.$$

- *d no es un punto α-interior de E, pues no pertenece a ningún elemento de α, razón por la cual, E no es α-abierto.*
- *$\{a,b,c\} = \{a,b\} \cup \{b,c\}$ es α-abierto.*

Definición 1.12. Si $\alpha = \Lambda_\alpha$, se dice que α es una *pretopología* y que el par (E,α) es un *espacio pretopológico*.

Esto es, una pretopología en E es el conjunto de α-abiertos de algún $\alpha \subseteq 2^E$.

Ejemplo 1.13. *Del ejemplo anterior, se tiene que $\alpha = \{\varnothing, ab, bc\}$ no es una pretopología, sin embargo, $\beta = \{\varnothing, ab, bc, abc\}$ si lo es. Además, se ve que β es un conjunto cerrado para uniones, no así para intersecciones, pues $ab \cap bc \notin \beta$.*

La proposición 1.14 provee de una caracterización muy útil de espacio pretopológico. Se recurrirá a ella en el capítulo 2.

Proposición 1.14. *Sea E un conjunto finito. El par (E,α) es un espacio pretopológico si, y sólo si, se satisface:*

(PT1) $\varnothing \in \alpha$,

(PT2) $A_i \in \alpha$ *para cada* $i = 1,2,\dots,n$, *entonces* $\bigcup A_i \in \alpha$.

Demostración. Véase [3]. □

Definición 1.15. Sean E un conjunto finito, $\alpha \subseteq 2^E$ y $A \in 2^E$.

1. Un elemento $a \in A$ se dice α-adherente a A, si para todo $U \in \alpha$ tal que $x \in U$ se tiene que $A \cap U \neq \varnothing$.
2. El conjunto de todos los puntos adherentes a A, se denomina la α-adherencia de A y se denota por $\overline{A}$.
3. A es un α-cerrado, si $A = \overline{A}$.
4. El conjunto de α-cerrados de E se denota por Γ_α, esto es

$$\Gamma_\alpha = \{A;\ A = \overline{A}\}.$$

Definición 1.16. Sea f es una función de un espacio pretopológico (E,α), en otro espacio pretopológico (F,β). f es continua si $f^{-1}(U) \in \alpha$, para cada $U \in \beta$.

Proposición 1.17. *Sea f es una función de un espacio pretopológico (E,α), en otro espacio pretopológico (F,β). Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *f es continua.*
2. *$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ para cada $A \subseteq E$.*

Demostración. Véase [3]. □

Definición 1.18. Sean E un espacio pretopológico e $I = [0,1]$ considerado con la topología usual. Toda función $\gamma : I \to E$ continua, se denomina *camino en E*.

Definición 1.19. Una separación del espacio pretopológico (E,α), es un par $A,B \in \alpha$ con $E^\circ \cap A \neq \varnothing$, $E^\circ \cap B \neq \varnothing$, $E^\circ \subseteq A \cup B$, tal que $\overline{A} \cap B = \varnothing$ y $A \cap \overline{B} = \varnothing$.

Definición 1.20. Un espacio pretopológico (E,α) es conexo, si no existe una separación del mismo.

Definición 1.21. Se dice que un espacio pretopológico (E,α) es T_0, si para cualquier par de elementos en E, existe un α-abierto que contiene a uno, pero no al otro.

Como ya se mencionó, a los elementos de una pretopología α se les llama α-abiertos de E, sin embargo, de aquí en adelante se les llamará simplemente abiertos (omitiendo α) siempre que sea claro el contexto. Se hará de la misma forma para los α-cerrados, los puntos α-interiores, los puntos α-adherentes y la α-adherencia de un subconjunto de E.

1.4. Espacios topológicos finitos

Un espacio topológico finito es un par (E,τ), donde E es un conjunto finito y $\tau \subseteq 2^E$ que satisface:

(TF1) $\varnothing \in \tau$, y $E \in \tau$,

(TF2) Si A, $B \in \tau$, entonces $A \cup B \in \tau$,

(TF3) Si A, $B \in \tau$, entonces $A \cap B \in \tau$.

Dicho conjunto τ se denomina *topología* en E. Obsérvese que las topologías son pretopologías que satisfacen el axioma adicional **(TF3)** y en las que E es un abierto. Además, que la intersección de todos los abiertos en E que contienen a x se llama *vecindad minimal de x*, también es un conjunto abierto, en virtud de **(TF3)**, se denota por U_x.

De ahora en adelante, para referirse a un espacio topológico finito (E,τ), se escribirá simplemente el "espacio topológico finito E", cuando no sea necesario mencionar a su topología τ.

Definición 1.22. $\mathcal{U}$ es una *base* para un espacio topológico E, si para cada $x \in A \in \tau$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \subseteq A$.

Proposición 1.23. *Una colección $\mathcal{U}$ de subconjuntos de E es una base para una topología sobre E si:*

1. $E = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$.
2. *Para cada par U, $U' \in \mathcal{U}$, $U \cap U'$ es unión de elementos de $\mathcal{U}$.*

Demostración. Véase [7]. □

Se dirá que $\mathcal{U}$ es una *base minimal* para E, si es una base para dicho espacio topológico finito, y es minimal en el sentido de la inclusión. En [8] se demuestra que el conjunto $\mathcal{U} = \{U_x; x \in E\}$ es la única base minimal para τ.

Definición 1.24. Sean E un conjunto y $\leq$ una relación binaria en E. Se dice que $\leq$ es un *preorden*, si es una relación reflexiva y transitiva; en cuyo caso, se dice que E es un conjunto preordenado. Además, si el preorden $\leq$ satisface la propiedad antisimétrica, entonces se dice que dicho preorden, es un *orden parcial*, y que E es un *poset*.

Cuando $x \leq y$, pero $x \neq y$, se escribirá $x < y$.

En [13], se presenta una manera de definir una topología τ en E, a partir de un preorden $\leq$ en E y viceversa, tal como se muestra a continuación:

(i) Sean $x,y \in E$, el preorden asociado a τ, se define de la siguiente manera:

$$x \leq y \quad \text{si, y sólo si,} \quad x \in U_y$$

Obsérvese que $x \in U_y$ si, y sólo si, $y \in \overline{x}$.

(ii) Si $x \in E$, se define el conjunto $U_x = \{y \in E; y \leq x\}$ y se tiene que la colección

$$\mathcal{U} = \{U_x \subseteq E; x \in E\},$$

es una base de una topología.

Mas aún, en [2] y en [8] se muestra que dicha conexión induce una correspondencia biyectiva entre los preórdenes en E y las topologías en E.

Proposición 1.25. *Las topologías T_0 están en correspondencia biunívoca con los ordenes parciales.*

Demostración. Véase [2]. □

Para representar gráficamente un poset, se suele usar un diagrama de Hasse, el cual se puede imaginar de tal manera, que un elemento está por debajo de otro, si el de abajo es menor igual que el de arriba. No es necesario considerar lazos, es decir, la arista que representa a $x \leq x$ quedará implícita. Obsérvese que el abierto minimal U_x, consiste de todos los elementos de E que están por debajo de x, conectados a él por medio de un camino del diagrama, esto es, el subdiagrama cuyo máximo es x.

Ejemplo 1.26. *Considérense el conjunto* $E = \{a,b,c,d\}$ *y el orden parcial*

$$a \le a \quad b \le b \quad c \le c \quad b \le a \quad c \le a \quad d \le a \quad d \le c.$$

Su diagrama de Hasse asociado es

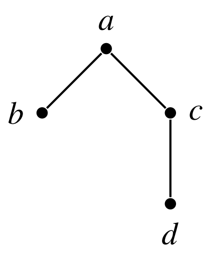


Figura 1-1

Nótese que la base minimal de la topología asociada, es $\mathcal{U} = \{\{a,b,c,d\}, \{b\}, \{c,d\}, \{d\}\}$.

A diferencia de lo que ocurre con una topología en general, en los espacios finitos, el conjunto de cerrados, también es una topología. Esto implica que al considerar los cerrados de un espacio topológico (E,τ), se obtiene un nuevo espacio, el cual se define como *el espacio opuesto* de (E,τ) denotado por (E^{op},τ^{op}). Así, de forma análoga a lo hecho anteriormente, se define el abierto minimal en (E^{op},τ^{op}), como el conjunto

$$F_x = \{y; \ x \le y\}.$$

Por lo tanto, en el diagrama de Hasse de un poset, el conjunto F_x consiste de todos los elementos de E, que están por encima de x, conectados a él por medio de un camino del diagrama, esto es, el subdiagrama cuyo mínimo es x.

Definición 1.27. Sean X e Y un par de espacios topológicos, $A \subseteq X$ y $f,g\colon X \longrightarrow Y$ un par de funciones continuas. Se dice que f y g son *homotópicas*, si existe una aplicación continua H: $[0,1] \times X \longrightarrow Y$ tal que, para todo $x \in X$

$$H(0,x) = g(x) \text{ y } H(1,x) = f(x).$$

En este caso, también se dice que H es una *homotopía* entre f y g.

Además, si $H(t,x) = f(x) = g(x)$ para todo $x \in A \subseteq X$, con $t \in [0,1]$, entonces se dice que H es una homotopía relativa a A, y que f y g son homotópicas relativas a A.

Se suele escribir $f \cong g$ (rel A), si f y g son homotópicas relativas a A, en el caso de que $A = \varnothing$, se escribe simplemente $f \cong g$.

Notando $h_t(x) = H(t,x)$, se observa que h_t es una función continua de X en Y para cada $t \in [0,1]$, y que cada una representa un camino que une a g con f. De manera informal, se puede decir que una homotopía H transforma a g en h_t en el instante t hasta llegar a f y que dicha transformación es continua.

La homotopía entre funciones continuas de un espacio en otro, es una relación de equivalencia, por lo que al considerar las clases de equivalencia, se habla de *clases de homotopía*.

Definición 1.28. Se dice que dos espacios X e Y son del mismo tipo homotópico (o que son homotópicamente equivalentes) si existen funciones continuas $f{:}X \longrightarrow Y$, $g{:}Y \longrightarrow X$ tales que $g \circ f \cong id_X$ y $f \circ g \cong id_Y$. En este caso se escribe $X \cong Y$ y se dice que f y g son equivalencias homotópicas.

Definición 1.29. Sean X e Y dos espacios topológicos. Un espacio topológico X se dice contráctil, si existe una función constante $c{:}X \longrightarrow Y$ tal que $id_X \cong c$. La homotopía H entre id_X y una función constante se denomina *contracción*.

Proposición 1.30. *Un espacio topológico es contráctil si, y sólo si, posee el mismo tipo de homotopía de un punto.*

Demostración. Véase [12]. □

Definición 1.31. Considérense $A \subseteq X$ y la inclusión $i_A{:}A \hookrightarrow X$. Se dice que A es:

1. un *retracto* de X, si existe una función continua $r{:}X \longrightarrow A$, tal que $r \circ i_A = id_A$. En este caso, r se denomina una *retracción*.

2. un *retracto por deformación* de X, si existe una retracción r tal que $i_A \circ r \cong id_X$.

3. un *retracto por deformación fuerte* de X, si existe una retracción r tal que $i_A \circ r \cong id_X$ (rel A).

Definición 1.32. El preorden puntual $\leq$, en el conjunto de las funciones continuas de E en F, se define de la siguiente manera: Sean $f,g : E \longrightarrow F$ continuas, $g \leq f$ si $g(x) \leq f(x)$, para todo $x \in E$.

Si $g \leq f$ o $f \leq g$ se dice que f y g son comparables.

Proposición 1.33. *Las funciones continuas $f,g : E \longrightarrow F$ son homotópicas si, y sólo si, existe una sucesión $g = f_0$, f_1, ..., $f_n = f$ de funciones tales que, para todo $i \in \{1,\dots n\}$, $f_i : E \longrightarrow F$ son continuas y f_i y f_{i+1} son comparables para cada i.*

Demostración. Véase [2]. □

Proposición 1.34. *Un espacio topológico finito E con máximo o mínimo es contráctil.*

Definición 1.35. Sea E un espacio topológico finito T_0 y sea $x \in E$. Se dice que x es un

- *up beat point* (u.b.p.) si existe $y \in E$ con $x < y$ tal que para todo $z \in E$ con $x < z$, se tiene que $y \leq z$.
- *down beat point* (d.b.p.) si existe $y \in E$ con $y < x$ tal que para todo $z \in E$ con $z < x$, se tiene que $z \leq y$.
- *beat point* (b.p.) si es un up beat point o un down beat point.

Además, se dice que E es un *espacio topológico finito minimal* si es T_0 y no posee b.p.

Definición 1.36. Un *core* de un espacio topológico finito E es un subespacio F, que es un espacio topológico finito minimal y un retracto por deformación fuerte de E.

Proposición 1.37 (McCord)**.** *Todo espacio topológico finito es homotópicamente equivalente a un espacio T_0.*

Demostración. Véase [2] o [9]. □

La definición de beat point, permite demostrar la siguiente proposición.

Proposición 1.38 (Stong)**.** *Todo espacio topológico finito tiene un core.*

Demostración. Véase [2] o [13]. □

Las proposiciones anteriores permitieron demostrar el siguiente teorema:

Teorema 1.39 (Teorema de clasificación)**.** *Una equivalencia homotópica entre espacios topológicos finitos minimales es un homeomorfismo . En particular, el core de un espacio topológico finito es único salvo homeomorfismo y dos espacios finitos son homotópicamente equivalentes si y sólo sus cores son homeomorfos.*

Demostración. Véase [2]. □

Capítulo 2

Pretopologías, FD relaciones y funciones submodulares

En este capítulo, se muestra una correspondencia biyectiva entre los espacios pretopológicos y las FD relaciones, (específicamente en la sección 2.2) por medio del concepto de operador de interior, el cual se introduce en la sección 2.1. En la sección 2.3, se estudian las nociones (pretopológicas) de punto interior, conjunto abierto, conjunto cerrado, espacio conexo, espacio T_0 y función continua, por medio de las funciones submodulares inducidas por una FD relación asociada a una pretopología; también, se estudiará, en el ámbito de las FD relaciones (y los espacios pretopológicos), la demostración de un teorema de McCord [9], referente a la clasificación de los espacios topológicos finitos, por tipo de homotopía.

Las referencias para este capítulo son [3], [7], [11].

2.1. Operadores de interior

En esta sección, se definen los operadores de interior. Se muestra una conexión entre estos y los operadores de clausura.

Definición 2.1. $i : 2^E \to 2^E$ es un *operador de interior* sobre E, si satisface:

(IN1) *Contracción:* $i(I) \subseteq I$, para cada $I \in 2^E$,

(IN2) *Monotonía:* $i(J) \subseteq i(I)$ si $J \subseteq I$,

(IN3) *Idempotencia:* $i(i(I)) = i(I)$, para cada $I \in 2^E$.

Además, cada elemento del conjunto

$$\alpha_i = \{U \in 2^E;\ \ i(U) = U\},$$

se denomina conjunto abierto en E según i.

La siguiente proposición no es más que el principio de clausura-complemento de Kuratowski [7], aplicado a operadores de clausura y a operadores de interior. Permitirá demostrar la correspondencia biunívoca entre las FD relaciones con soporte finito y los espacios pretopológicos finitos.

Proposición 2.2. *Si $c, i : 2^E \longrightarrow 2^E$ son operadores tales que*

$$i(I) = (c(I^{\mathsf{c}}))^{\mathsf{c}} \text{ para cada } I \in 2^E,$$

entonces, c es un operador de clausura si, y sólo si, i es un operador de interior.

Demostración. Si c es un operador de clausura, entonces,

(IN1) Por **(CL1)** se tiene $I^{\mathsf{c}} \subseteq c(I^{\mathsf{c}})$, esto implica que $i(I) = (c(I^{\mathsf{c}}))^{\mathsf{c}} \subseteq I$.

(IN2) $J \subseteq I \Rightarrow I^{\mathsf{c}} \subseteq J^{\mathsf{c}} \Rightarrow c(I^{\mathsf{c}}) \subseteq c(J^{\mathsf{c}}) \Rightarrow i(J) \subseteq i(I)$, por **(CL2)**.

(IN3) $i(i(I)) = [c(i(I)^{\mathsf{c}})]^{\mathsf{c}} = [c(c(I^{\mathsf{c}}))]^{\mathsf{c}} = [c(I^{\mathsf{c}})]^{\mathsf{c}} = i(I)$, por **(CL3)**.

Recíprocamente, supóngase que i es un operador de interior, luego:

(CL1) se tiene $i(I^{\mathsf{c}}) \subseteq I^{\mathsf{c}}$, esto implica que $(c(I))^{\mathsf{c}} \subseteq I^{\mathsf{c}}$, luego $I \subseteq c(I)$.

(CL2) $J \subseteq I \Rightarrow I^{\mathsf{c}} \subseteq J^{\mathsf{c}} \Rightarrow i(I^{\mathsf{c}}) \subseteq i(J^{\mathsf{c}}) \Rightarrow c(J) \subseteq c(I)$, por **(IN2)**.

(CL3) $c(c(I)) = [i(c(I)^{\mathsf{c}})]^{\mathsf{c}} = [i(i(I^{\mathsf{c}}))]^{\mathsf{c}} = [i(I^{\mathsf{c}})]^{\mathsf{c}} = c(I)$, por **(IN3)**.

□

La anterior proposición garantiza, que cada operador de clausura se puede definir por medio de un operador de interior, y viceversa, de manera biunívoca, pues denotando por c_i al operador de clausura definido mediante un operador de interior i, y por i_c al operador de interior definido mediante uno de clausura c, se tiene:

$$i_c = i_{c_i} \quad \text{y} \quad c_i = c_{i_c},$$

lo cual es fácil de verificar.

Corolario 2.3. *A es abierto en E según i_c si, y sólo si, A^{c} es cerrado en E según c_i.*

Demostración. Por definición, $A \in 2^E$ es abierto según i_c si, y sólo si, $A = i_c(A) = (c(A^{\mathsf{c}}))^{\mathsf{c}}$, lo que equivale a $A^{\mathsf{c}} = c(A^{\mathsf{c}})$. Luego, A^{c} es cerrado según c_i. □

2.2. FD relaciones y pretopologías

El propósito de esta sección, es mostrar que las FD relaciones y las pretopologías están vinculadas de manera biunívoca.

Proposición 2.4. *Sea $i : 2^E \longrightarrow 2^E$ un operador de interior sobre E. El conjunto*

$$\alpha_i = \{A \in 2^E;\ i(A) = A\},$$

es una pretopología.

Demostración. Se afirma que α_i es un conjunto cerrado para uniones, y que $\varnothing$ es un elemento de dicho conjunto. En efecto,

(PT1) Por **(IN1)**, $i(\varnothing) \subseteq \varnothing$, luego $i(\varnothing) = \varnothing$.

(PT2) Sean $A, B \in \alpha_i$, por definición, se tiene que $i(A) = A$ y $i(B) = B$. Por lo tanto,

$$A \cup B = i(A) \cup i(B) \subseteq i(A \cup B).$$

Además, $i(A \cup B) \subseteq A \cup B$, luego $i(A \cup B) = A \cup B$.

□

Se define el conjunto U_A, de elementos de $\alpha \subseteq 2^E$ contenidos en A, esto es:

$$U_A := \{U \in \alpha;\ U \subseteq A\}.$$

Proposición 2.5. *Sea $\alpha \subseteq 2^E$ tal que $\varnothing \in \alpha$. La función $i_\alpha : 2^E \longrightarrow 2^E$ definida por*

$$i_\alpha(A) = \bigcup_{U \in U_A} U,$$

es un operador de interior.

Demostración.

(IN1) $i_\alpha(A) \subseteq A$ por definición.

(IN2) Si $A \subseteq B$, entonces $U_A \subseteq U_B$ y por lo tanto, $i_\alpha(A) \subseteq i_\alpha(B)$.

(IN3) Si $U \in U_A$, por definición se tiene $i_\alpha(U) = U$, lo que implica, junto con **(IN2)**, que $U \subseteq i_\alpha(A)$ y por lo tanto, $U \in U_{i_\alpha(A)}$. Recíprocamente, supóngase que $U \in U_{i_\alpha(A)}$, esto implica que $U \subseteq \alpha$ y $U \subseteq i_\alpha(A) \subseteq A$ por **(IN1)**, luego $U \in U_A$. Se demostró que, $U_A = U_{i_\alpha(A)}$ y esto implica que:

$$i_\alpha(A) = i_\alpha(i_\alpha(A)).$$

□

Es importante notar que $\varnothing$ debe ser un elemento de α, para que $i_\alpha(\varnothing)$ esté definido. Nótese además, que es posible tener un operador de interior asociado a varios subconjuntos de 2^E, como se puede apreciar en el ejemplo que sigue.

Ejemplo 2.6. *Considérense los siguientes conjuntos* $E = \{a,b,c\}$, $\alpha_1 = \{\varnothing,a,b,ac\}$, $\alpha_2 = \{\varnothing,a,b,ab,ac,abc\}$.

Para cada $A \in 2^E$, *la siguiente tabla muestra los conjuntos* U_A, U'_A, *cuyos elementos están en* α_1 *y* α_2, *respectivamente.*

A	$\varnothing$	a	b	c	ab	ac	bc	abc
U_A	$\{\varnothing\}$	$\{\varnothing,a\}$	$\{\varnothing,b\}$	$\{\varnothing\}$	$\{\varnothing,a,b\}$	$\{\varnothing,a,ac\}$	$\{\varnothing,b\}$	$\{\varnothing,a,b,ac\}$
U'_A	$\{\varnothing\}$	$\{\varnothing,a\}$	$\{\varnothing,b\}$	$\{\varnothing\}$	$\{\varnothing,a,b,ab\}$	$\{\varnothing,a,ac\}$	$\{\varnothing,b\}$	$\{\varnothing,a,b,ab,ac,abc\}$

Tabla 2-1

Por la proposición 2.4,

$$i_{\alpha_1}(A) = \bigcup_{U \in U_A} U \quad e \quad i_{\alpha_2}(A) = \bigcup_{U \in U'_A} U,$$

son operadores de interior asociados a α_1 *y a* α_2, *respectivamente. En la tabla 2-1 se observa que* $i_{\alpha_1}(A) = i_{\alpha_2}(A)$, *para cada* $A \in 2^E$. *Nótese que* α_1 *no es una pretopología, mientras que* α_2 *si lo es.*

Proposición 2.7. *Si* α *es una pretopología, e* i_α *su operador de interior asociado, se tiene*

$$\alpha_{i_\alpha} = \alpha.$$

Demostración. Las igualdades

$$A = A^\circ = \{a \in A; \exists U \in \alpha, a \in U \subseteq A\} = \bigcup_{U \in U_A} U = i_\alpha(A),$$

muestran que $A \in \alpha_{i_\alpha}$ si y sólo si $A \in \alpha$. □

La proposición 2.7 implica que si α_1 y α_2 son dos pretopologías, entonces $i_{\alpha_1} \neq i_{\alpha_2}$. En efecto, si se supone que $i_{\alpha_1} = i_{\alpha_2}$, por la proposición 2.7

$$\alpha_1 = \alpha_{i_{\alpha_1}} = \alpha_{i_{\alpha_2}} = \alpha_2.$$

Lo que no sucede si α_1 o α_2 no son pretopologías (ejemplo 2.6).

Proposición 2.8. *Si* i *es un operador de interior y* α_i *su pretopología asociada, entonces* $i_{\alpha_i} = i$.

Demostración. Sea $A \in 2^E$. Por **(IN1)** e **(IN3)** se tiene, respectivamente,

$$i(A) \subseteq A \quad \text{e} \quad i(i(A)) = i(A)$$

por lo tanto, $i(A) \in \alpha_i$, lo que implica que $i(A) \in U_A$. Además, por **(IN2)**, si $U \in U_A$, entonces $i(U) \subseteq i(A)$. En consecuencia,

$$i_{\alpha_i}(A) = \bigcup_{U \in U_A} U = \bigcup_{U \in U_A} i(U) = i(A).$$

□

Lo anterior implica, que el operador de interior inducido por una pretopología, es único.

Por las proposiciones 2.7 y 2.8, se concluye que las pretopologías, están en correspondencia biyectiva con los operadores de interior. Hasta aquí, se han descrito correspondencias biunívocas entre:

1. Las FD relaciones y los operadores de clausura (proposición 1.10).
2. Los operadores de clausura y los operadores de interior (proposición 2.2).
3. Los operadores de interior y las pretopologías.

Todo lo anterior muestra que existe una correspondencia biunívoca entre las FD relaciones con soporte E y las pretopologías sobre el mismo conjunto. Es decir, las FD relaciones y las pretopologías, son en cierto sentido, las mismas estructuras. Esto permite caracterizar los elementos en espacios pretopológicos por medio de FD relaciones y más adelante, por medio de funciones submodulares.

La proposición 1.9 provee de un operador de clausura definido por la siguiente igualdad:

$$c_{\mathcal{N}}(I) = \bigcup_{J \in \mathcal{N}(I)} J,$$

el cual es un operador de clausura asociado a una FD relación $\mathcal{N}$. Así mismo, provee de la FD relación

$$\mathcal{N}_c = \{(I,J) \in 2^E \times 2^E; J \subseteq c(I)\},$$

asociada a un operador de clausura c.

Por la proposición 2.2 $i(A) = c(A^c)^c$ es un operador de interior, luego, la función $i_{\mathcal{N}} : 2^E \to 2^E$ definida por

$$i_{\mathcal{N}}(I) = \bigcap_{J \in \mathcal{N}(I^c)} J^c,$$

es un operador de interior asociado a $\mathcal{N}$, y el conjunto

$$\mathcal{N}_i = \{(I,J) \in 2^E \times 2^E;\ \ i(I^c) \subseteq J^c\},$$

es una FD relación asociada a un operador de interior i. Obsérvese que

$$\mathcal{N}_{i_c} = \{(I,J) \in 2^E \times 2^E;\ \ i_c(I^c) \subseteq J^c\} = \{(I,J) \in 2^E \times 2^E;\ \ J \subseteq (i_c(I^c))^c = c(I)\} = \mathcal{N}_c.$$

Lo que indica que la FD relación inducida por c y la FD relación inducida por su operador de interior asociado i_c, son iguales. De forma análoga, se ve que $\mathcal{N}_{c_i} = \mathcal{N}_i$.

Definición 2.9. Si (E,α) es un espacio pretopológico finito y c su operador de clausura, la FD relación asociada a α es $\mathcal{N}_c$, la cual se denotará por $\mathcal{N}_\alpha$.

Observación 2.10. Si (E,α) es un espacio pretopológico finito, $A \in 2^E$ y $\mathcal{N}_\alpha$ su FD relación asociada. Entonces $c_{\mathcal{N}_\alpha}(A) = \overline{A}$, pues

$$a \in c_{\mathcal{N}_\alpha}(A) \Leftrightarrow a \in \bigcup_{B \in \mathcal{N}(A)} B \Leftrightarrow a \in B \quad \text{para algún } B \in \mathcal{N}_c(A) \Leftrightarrow a \in \mathcal{N}_c(A) \Leftrightarrow a \in c(A) = \overline{A}$$

Esto demuestra, que

$$a \in (c_{\mathcal{N}_\alpha}(A^c))^c = i_{\mathcal{N}_\alpha}(A) \Leftrightarrow a \in i(A) = A^\circ.$$

Es decir $i_{\mathcal{N}_\alpha}(A) = A^\circ$.

Y por la proposición 1.10,

$$c_\alpha = c_{\mathcal{N}_\alpha}.$$

Ejemplo 2.11. *Sea* $\alpha = \{\varnothing, a, b, ab, ac, abc\}$ *(la pretopología* α_2 *del ejemplo 2.6). Considérese su operador de interior asociado:*

A	$\varnothing$	a	b	c	ab	ac	bc	abc
$i_\alpha(A)$	$\varnothing$	a	b	$\varnothing$	ab	ac	b	abc

Tabla 2-2

Usando la proposición 2.2 y la tabla 2-2, se obtiene:

$$c_\alpha(\varnothing) = [i_\alpha(\varnothing^c)]^c = [i_\alpha(abc)]^c = abc^c = \varnothing$$
$$c_\alpha(a) = [i_\alpha(a^c)]^c = [i_\alpha(bc)]^c = b^c = ac$$
$$c_\alpha(b) = [i_\alpha(b^c)]^c = [i_\alpha(ac)]^c = ac^c = b$$
$$c_\alpha(c) = [i_\alpha(c^c)]^c = [i_\alpha(ab)]^c = ab^c = c$$

$$c_\alpha(ab) = [i_\alpha(ab^c)]^c = [i_\alpha(c)]^c = \varnothing^c = abc$$
$$c_\alpha(ac) = [i_\alpha(ac^c)]^c = [i_\alpha(b)]^c = b^c = ac$$
$$c_\alpha(bc) = [i_\alpha(bc^c)]^c = [i_\alpha(a)]^c = a^c = bc$$
$$c_\alpha(abc) = [i_\alpha(abc^c)]^c = [i_\alpha(\varnothing)]^c = \varnothing^c = abc$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{N}_\alpha = \mathcal{N}_{c_\alpha} = \{(a,c),(a,ac),(ab,c),(ab,bc),(ab,ac),(ab,abc)\}.$$

2.3. Algunas nociones pretopológicas desde las funciones submodulares

Si $f \in \lambda(\mathcal{N})$, entonces satisface:

$$B \in \mathcal{N}(A) \Leftrightarrow f(A,B) = f(A). \tag{2-1}$$

Además, recuérdese que $B \in \mathcal{N}(A) \Leftrightarrow B \subseteq c_{\mathcal{N}}(A)$, esto que permitirá caracterizar algunas nociones de los espacios pretopológicos finitos por medio las funciones submodulares que pertenecen al conjunto $\lambda(\mathcal{N})$.

Proposición 2.12. *Sean (E,α) un espacio pretopológico finito, $\mathcal{N}_\alpha$ su FD relación asociada y $A \in 2^E$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *a es un punto interior de A.*
2. $\{a\} \notin \mathcal{N}_\alpha(A^c)$.
3. $f(A^c) < f(A^c \cup a)$.

Demostración. Por la observación 2.10, se tiene

$$a \in A^\circ \;\Leftrightarrow\; a \in i_{\mathcal{N}}(A) \;\Leftrightarrow\; (a \notin B \;\; \forall B \in \mathcal{N}(A^c)).$$

La parte izquierda de la anterior equivalencia, equivale a tener $\{a\} \notin \mathcal{N}(A^c)$ y esto a su vez, es equivalente a tener $f(A^c) < f(A^c \cup a)$, pues f es no decreciente. □

Proposición 2.13. *Sean (E,α) un espacio pretopológico finito, $\mathcal{N}_\alpha$ su FD relación asociada y $A \in 2^E$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *A es un conjunto abierto.*
2. $\mathcal{N}_\alpha(A^c) = 2^{A^c}$.

3. $f(A^c) = f(A^c \cup B)$ *si, y sólo si,* $B \subseteq A^c$.

Demostración. Considerando el operador de interior asociado a $\mathcal{N}$, A es abierto si, y sólo si,

$$A = A^\circ = i_{\mathcal{N}_\alpha}(A).$$

Luego,

$$\bigcap_{B \in \mathcal{N}(A^c)} B^c = A \iff \bigcup_{B \in \mathcal{N}(A^c)} B = A^c \iff B \subseteq A^c \text{ para todo } B \in \mathcal{N}_{A^c} \iff \mathcal{N}(A^c) = 2^{A^c}.$$

Pero esto es equivalente a tener $f(A^c) = f(A^c \cup B)$ si, y sólo si, $B \subseteq A^c$.

□

Obsérvese que $a \in E^\circ$ si y sólo si $a \notin \mathcal{N}_\alpha(\varnothing)$ y que E es abierto si y sólo si $\mathcal{N}_\alpha(\varnothing) = \{\varnothing\}$.

Proposición 2.14. *Sean* (E, α) *un espacio pretopológico finito,* $\mathcal{N}_\alpha$ *su FD relación asociada y* $A \in 2^E$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *A es un conjunto cerrado.*
2. $\mathcal{N}_\alpha(A) = 2^A$.
3. $f(A \cup B) = f(B)$ *si, y sólo si,* $B \subseteq A$.

Demostración. Considerando el operador de clausura asociado a $\mathcal{N}$, A es cerrado si $A = \overline{A} = c_{\mathcal{N}_\alpha}(A)$, en consecuencia

$$\bigcup_{B \in \mathcal{N}(A)} B = A \iff B \subseteq A,\ \forall B \in \mathcal{N}(A) \iff \mathcal{N}(A) = 2^A.$$

Lo que equivale a $f(A \cup B) = f(B)$ si, y sólo si, $B \subseteq A$.

□

Proposición 2.15. *Sea* $\mathcal{N}$ *una FD relación con soporte E, si x,* $y \in E$ *son tales que* $y \in \mathcal{N}(x)$, *entonces existe un camino* γ *de x a y en E, es decir, que satisface* $\gamma(x) = 0$ *y* $\gamma(x) = 1$.

Demostración. Defínase la función $\gamma : I \to E$ de la siguiente manera:

$$\gamma(t) := \begin{cases} x & si \quad 0 \le t < 1 \\ y & si \quad t = 1 \end{cases}$$

la cual es continua, y para demostrarlo, se recurrirá a la proposición 1.17:

Sea $A \subseteq I$ no vacío (para $A = \varnothing$, el resultado válido trivialmente), si $x \in \gamma[\overline{A}]$, entonces existe $t \in [0,1) \cap A$, luego $x \in \gamma[A] \subseteq \overline{\gamma[A]}$. Ahora, considérense los siguientes casos:

1. Si $1 \in A$, entonces $1 \in \overline{A}$, $y \in \gamma[A] \subseteq \gamma[\overline{A}]$.

2. Si $1 \notin A$, entonces se tienen dos posibles opciones:

   a) Que $1 \notin \overline{A}$, por lo que en este caso, $y \notin \gamma[\overline{A}]$, luego $\overline{\gamma[A]} = x$.

   b) Que $1 \in \overline{A}$, por lo que $\gamma[\overline{A}] = xy$, pero como $y \in \mathcal{N}(x)$, entonces $y \in \overline{x} \subseteq \overline{\gamma[A]}$.

Por los ítems 1) y 2), se tiene $\gamma[\overline{A}] \subseteq \overline{\gamma[A]}$, esto implica que γ es una función continua, y por lo tanto, es un camino en E. □

Proposición 2.16. *Sea $\mathcal{N}$ una FD relación con soporte E, las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *E es conexo.*

2. *Para cualesquier x, $y \in E$ existe un conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq E$ con $x_i \notin \mathcal{N}(\varnothing)$, $i = 1, 2, \dots, n$ tal que $x = x_1$, $y = x_n$ y $x_i \in \mathcal{N}(x_{i+1})$ o $x_{i+1} \in \mathcal{N}(x_i)$*

Demostración.

$\Rightarrow$) Sean $x, y \in E$, distintos. Téngase en cuenta que por la observación 2.10, $c_{\mathcal{N}_\alpha}(x) = \overline{x}$ y $c_{\mathcal{N}_\alpha}(x^c) = \overline{x^c}$ y considérense los siguientes casos:

1. Si $x \in E \backslash E^\circ$, entonces, por la proposición 2.14, $x \in \mathcal{N}(\varnothing)$, pero, $\varnothing \in \mathcal{N}(y)$ (por **(FD1)**), luego, por **(FD2)** se tiene $x \in \mathcal{N}(y)$.

2. Si $x, y \in E^\circ$, como $x \neq y$, entonces $E^\circ \cap x \neq \varnothing$ y $E^\circ \cap x^c \neq \varnothing$, además, $E^\circ \subseteq E = x \cup x^c$. Como E es conexo, entonces $x \cap \overline{x^c} \neq \varnothing$ o $\overline{x} \cap x^c \neq \varnothing$, esto implica que existe un elemento $z \neq x$ tal que $z \in \mathcal{N}(x)$ o $x \in \mathcal{N}(z)$. Si $z = y$, se tiene el resultado, de lo contrario, considérese el conjunto

$$A_1 = \{z; z \in \mathcal{N}(x) \text{ o } x \in \mathcal{N}(z)\}.$$

   Nótese que $x \in A_1$. De nuevo, por ser E es conexo y $E^\circ \subseteq A_1 \cup A_1^c$, entonces $A_1 \cap \overline{A_1^c} \nsubseteq \varnothing$ o $\overline{A}_1 \cap A_1^c \nsubseteq \varnothing$, es decir, para algún $z \in A_1$ existe $z' \in \mathcal{N}_\alpha(z)$ o existe $z \in \mathcal{N}_\alpha(z')$. Si $z' = y$, se tendría $x = x_0$, x_1, $x_2 = z' = y$ con $x_1 \in A_1$ y esto concluiría la demostración, sin embargo, si $z' \neq y$ se continúa con el razonamiento anterior y considerando que E es finito este procedimiento debe terminar en algún momento a $x_n = y$ con lo que se muestra la primera parte de la proposición.

$\Leftarrow$) Sean $A, B \in 2^E$ tales que $E^\circ \subseteq A \cup B$ y sean $x \in A$ e $y \in B$. Por hipótesis, existen $x = x_1, x_2, \dots, y = x_n \in E^\circ$ tales que, se tiene $x_i \in \mathcal{N}_{x_{i+1}}$ o $x_{i+1} \in \mathcal{N}_{x_i}$. Si $x_i \in A$ y $x_{i+1} \in B$, entonces $x_i \in \overline{B}$ o $x_{i+1} \in \overline{A}$, en cualquier caso, $A \cap \overline{B} \neq \varnothing$ o $\overline{A} \cap B \neq \varnothing$, por lo que E es conexo.

□

Las proposiciones anteriores muestran que un espacio pretopológico (E, α) es conexo por caminos, entonces es conexo. Además, es posible caracterizar el concepto de conexidad en espacios pretopológicos mediante funciones submodulares, como se hace a continuación.

Corolario 2.17. *Sea $f \in \lambda(\mathcal{N})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i. *E es conexo.*

ii. $f(x_i, x_{i+1}) = f(x_i)$ *o* $f(x_i, x_{i+1}) = f(x_{i+1})$.

Demostración. E es conexo, si y sólo si para cualesquier $x, y \in E$ existen elementos $x = x_1, x_2, .., y = x_n$ tales que $(x_i, x_{i+1}) \in \mathcal{N}$ o $(x_{i+1}, x_i) \in \mathcal{N}$, lo que equivale a

$$f(x_i, x_{i+1}) = f(x_i) \text{ o } f(x_i, x_{i+1}) = f(x_{i+1}),$$

pues $f \in \lambda(\mathcal{N})$. □

Ejemplo 2.18.

1. *El conjunto*

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_{|abc|} \cup \{(a,b), (a,ab), (ac,b), (ac,ab), (ac,bc), (ac,abc)\}$$

es una FD relación que define un espacio pretopológico no conexo ya que c no se relaciona con ningún subconjunto de abc.

Además,

$$\mathcal{N}(abc) = abc,\ \mathcal{N}(bc) = bc,\ \mathcal{N}(ab) = ab,\ \mathcal{N}(c) = c,\ \mathcal{N}(b) = b,\ \mathcal{N}(\varnothing) = \{\varnothing\}$$

Por lo que los abiertos de la pretopología son

$$\varnothing,\ a,\ c,\ ab,\ ac,\ abc.$$

Obsérvese que esta pretopología, es una topología.

2. *El conjunto $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{|abc|} \cup M$, donde*

$$M = \{(a,b), (a,ab), (ac,b), (ac,ab), (ac,bc), (c,b), (c,bc), (ac,abc), (\varnothing,b), (\varnothing,c), (\varnothing,bc)\}$$

es un ejemplo de FD relación de soporte $E = \{a,b,c\}$, asociada a una pretopología conexa, pues (a,b), $(c,b) \in \mathcal{N}$, además, en la que el propio E no es abierto, debido a que $(\varnothing, b) \in \mathcal{N}$.

Proposición 2.19. *Sean (E,α), (F,β) dos espacios pretopológicos, $\mathcal{N}_\alpha$ y $\mathcal{N}_\beta$ sus respectivas FD relaciones asociadas. $g : E \to F$ es una función continua sí, y sólo si, para todo $A \in 2^E$ y todo $B \in \mathcal{N}_\alpha(A)$ se tiene $g[B] \in \mathcal{N}_\beta(g[A])$.*

Demostración. En virtud de la observación 2.10,

$$\overline{A} = c_{\mathcal{N}_\alpha}(A) = \bigcup_{B \in \mathcal{N}_\alpha(A)} B.$$

Supóngase primero que g es continua, lo que equivale a $g[\overline{A}] \subseteq \overline{g[A]}$, para todo $A \in 2^E$ (proposición 1.18). Si $B \in \mathcal{N}_\alpha(A)$, entonces $B \subseteq \overline{A}$ y de esta manera, $g[B] \subseteq g[\overline{A}] \subseteq \overline{g[A]}$, por lo tanto,

$$g[B] \in \mathcal{N}_\beta(g[A]).$$

Esto muestra la primera parte.

Recíprocamente, para todo $A \in 2^E$, supóngase que si $B \in \mathcal{N}_\alpha(A)$ entonces $g[B] \in \mathcal{N}_\beta(g[A])$, lo que implica

$$g[\overline{A}] = g[\bigcup_{B \in \mathcal{N}_\alpha(A)} B] = \bigcup_{B \in \mathcal{N}_\alpha(A)} g[B] \subseteq \bigcup_{g[B] \in \mathcal{N}_\beta(g[A])} g[B] \subseteq \overline{g[A]}.$$

Luego, g es continua. □

Ejemplo 2.20. *Sea $E = \{a,b,c\}$. Considérense las FD relaciones con soporte E:*

- $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_{|E|} \cup \{(a,c),(b,c),(a,ac),(b,bc),(ab,ac),(ab,c),(ab,bc),(ab,abc)\}$.
- $\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_{|E|} \cup \{(c,a),(c,ac),(bc,a),(bc,ab),(bc,ac),(bc,abc)\}$.

Por la definición 2.9, se observa que:

- *La pretopología asociada a $\mathcal{N}_1$ es $\alpha = \{ab,a,b,abc,\varnothing\}$.*
- *La pretopología asociada a $\mathcal{N}_2$ es $\beta = \{bc,ac,b,c,\varnothing\}$.*

Además, considérense las funciones g_1, g_2 de (E,α) en (E,β), descritas por las siguiente tablas:

x	a	b	c
$g_1(x)$	c	c	a

x	a	b	c
$g_2(x)$	c	b	a

Tabla 2-3

Ahora, se hará el cálculo de $\overline{A}$, $g_i[A]$, $g_i[\overline{A}]$, $\overline{g_i[A]}$ y también se verificará si $(A,B) \in \mathcal{N}_1$ implica $(g_i[A], g_i[B]) \in \mathcal{N}_2$, $i = 1,2$.

1. *g_1:*

A	a	b	c	ab	ac	bc	abc
$\overline{A}$	ac	bc	c	abc	ac	bc	abc
$g_1[A]$	c	c	a	c	ac	ac	ac
$g_1[\overline{A}]$	ac	ac	a	ac	ac	ac	ac
$\overline{g_1[A]}$	ac	ac	a	ac	ac	ac	ac

Tabla 2-4

Naturalmente, la clausura de A es relativa a la pretopología α, mientras que la clausura de $g[A]$ es relativa a β.

Las dos últimas filas de la tabla 2-4 revelan que g_1 es continua. Ahora, obsérvese este hecho en términos de las FD relaciones $\mathcal{N}_1$ y $\mathcal{N}_2$:

(A,B)	(a,c)	(b,c)	(a,ac)	(b,bc)	(ab,c)	(ab,ac)	(ab,bc)	(ab,abc)
$(g_1[A],g_1[B])$	(c,a)	(c,a)	(c,ac)	(c,ac)	(c,a)	(c,ac)	(c,ac)	(c,ac)

Tabla 2-5

En la tabla 2-5, la segunda columna tiene solamente elementos de $\mathcal{N}_2$. Se ha ilustrado la proposición 2.19, para la función continua g_1.

2. *g_2 no es una función continua, ya que en (E,α) se tiene $\overline{b} = \{b,c\}$, luego $g_2[\overline{b}] = \{a,b\}$, por otro lado $\overline{g[b]} = \{b\}$ (en (E,β)). Nótese además, que $(b,c) \in \mathcal{N}_1$, pero que $(g_2[b],g_2[c]) = (b,a) \notin \mathcal{N}_2$.*

A continuación, se demuestra otra proposición relativa a las funciones continuas de un espacio pretopológico en otro, considerando las funciones submodulares.

Proposición 2.21. *Sean $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ dos FD relaciones con soporte E_1 y E_2 respectivamente, g una función de E_1 a E_2, $f \in \lambda(\mathcal{N}_2)$ y considere la función G de las imágenes directas de g, esto es $G(A) = g[A]$. Si $f \circ G \in \lambda(\mathcal{N}_1)$, entonces g es continua.*

Demostración. Si $f \circ G \in \lambda(\mathcal{N}_1)$ y $B \in \mathcal{N}_1(A)$, entonces $f \circ G(A \cup B) = f \circ G(A)$, lo que implica

$$f(G(A) \cup G(B)) = f(G(A)).$$

Pero $f \in \lambda(\mathcal{N}_2)$, entonces $(g[A],g[B]) = (G(A),G(B)) \in \mathcal{N}_2$, es decir, $G(B) \in \mathcal{N}_2(G(A))$, luego g es continua.

□

El recíproco de la proposición 2.21 no es cierto en general, como se observa en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.22. *Considérense el conjunto $E = \{a,b,c\}$, los espacios pretopológicos (E,α) en (E,β), donde α y β son, respectivamente, las pretopologías asociadas a las siguientes FD relaciones:*

- $\mathcal{N}_\alpha = \{(a,c),(a,ac),(ab,c),(ab,bc),(ab,ac),(ab,abc)\}$
- $\mathcal{N}_\beta = (b,a),(b,ab),(bc,a),(bc,ab),(bc,ac),(bc,abc),(c,a),(c,ac),(bc,ac),(bc,abc)$

Considérese además, la función $g{:}E \to E$, definida por la siguiente tabla:

x	a	b	c
$g(x)$	b	c	a

Tabla 2-6

La cual induce la función $G : 2^E \longrightarrow 2^E$, que se describe a continuación:

A	$\varnothing$	a	b	c	ab	ac	bc	abc
$G(A)$	$\varnothing$	b	c	a	bc	ab	ac	abc

Tabla 2-7

Obsérvese que $G(B) \in \mathcal{N}_\beta(G(A))$ para cada $B \in \mathcal{N}_\alpha(A)$, y se concluye que g es continua. Además, considérese la función submodular $f \in \lambda(\mathcal{N}_\beta)$:

A	$\varnothing$	a	b	c	ab	ac	bc	abc
$f(A)$	0	1	4	4	4	4	6	6

Tabla 2-8

Por lo tanto,

$$\begin{array}{cccc} f\circ G(\varnothing)=f(\varnothing)=0 & f\circ G(a)=f(b)=4 & f\circ G(b)=f(c)=4 & f\circ G(c)=f(a)=1 \\ f\circ G(ab)=f(bc)=6 & f\circ G(ac)=f(ab)=4 & f\circ G(bc)=f(ac)=4 & f\circ G(abc)=f(abc)=6 \end{array}$$

Como se puede ver: $f\circ G(ab\cup ac)=6$, $f\circ G(ab\cap ac)=4$, $f\circ G(ac)+f\circ G(bc)=8$, por lo que en este caso $f\circ G$ no es submodular.

Proposición 2.23. *Sean (E,α) un espacio pretopológico finito, $\mathcal{N}_\alpha$ su FD relación asociada y $A \in 2^E$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *E es un espacio pretopológico T_0.*

2. *$y \in \mathcal{N}(x)$ y $x \in \mathcal{N}(y)$ si, y sólo si, $x = y$. Para todo par $x,y \in E$.*

3. *$f(xy) = f(x)$ y $f(xy) = f(y)$ si, y sólo si, $x = y$.*

Demostración. E es T_0 si, y sólo si, $\overline{x} = \overline{y}$ implica $x = y$. Lo que en términos de FD relaciones equivale a escribir

$$E \text{ es } T_0 \text{ si, y sólo si, } y \in \mathcal{N}(x) \text{ y } x \in \mathcal{N}(y) \text{ implica } x = y.$$

Lo que, a su vez, equivale a escribir: $f(xy) = f(x)$ y $f(xy) = f(y)$ si, y sólo si, $x = y$. □

Si x, y son elementos de E, entonces la relación

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad y \in \mathcal{N}(x) \text{ y } x \in \mathcal{N}(y). \tag{2-2}$$

es de equivalencia sobre E, la cual se denomina *relación de equivalencia inducida por* $\mathcal{N}$. La reflexividad y la simetría son inmediatas, mientras que la transitividad se tiene por **(FD3)**.

La clase de equivalencia de $x \in E$ se denota por $[x]$ y el conjunto de todas las clases de equivalencia, por E'. Si $A \in 2^E$, el conjunto de clases de equivalencia de cada elemento de A se denota por $[A]$, más precisamente,

$$[A] = \{[x] \in E'; x \in A\}.$$

Nótese que $[\varnothing] = \varnothing$.

Proposición 2.24. *El conjunto*

$$\mathcal{N}_{\sim} = \{([A],[B]) \in 2^{E'} \times 2^{E'}; B \in \mathcal{N}(A)\},$$

es una FD relación, con soporte E'.

Demostración.

(FD1) Si $[B] \subseteq [A]$, se tienen dos casos:
1. $B \subseteq A$, en donde $B \in \mathcal{N}(A)$, por consiguiente, $([A],[B]) \in \mathcal{N}_{\sim}$.
2. Para todo $x \in B$ existe $y \in A$ tal que $[x] = [y]$, en particular, $x \in \mathcal{N}(A)$ para todo $x \in B$ y por tanto, $B \in \mathcal{N}(A)$ (pues $\mathcal{N}$ satisface **(FD3)**), luego $([A],[B]) \in \mathcal{N}_{\sim}$.

(FD2) $([A],[B]),([B],[C]) \in \mathcal{N}_{\sim}$, entonces $B \in \mathcal{N}(A)$ y $C \in \mathcal{N}(B)$, luego, $C \in \mathcal{N}(A)$ (pues $\mathcal{N}$ satisface **(FD2)**), por tanto $([A],[C]) \in \mathcal{N}_{\sim}$.

(FD3) $([A],[B]),([A],[C]) \in \mathcal{N}_{\sim}$, entonces $B \in \mathcal{N}(A), C \in \mathcal{N}(A)$, asi que $B \cup C \in \mathcal{N}(A)$ y por esto, $([A],[B] \cup [C]) \in \mathcal{N}_{\sim}$.

□

Ejemplo 2.25. *La FD relación*

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_{|abc|} \cup \{(a,b),(b,a),(a,ab),(b,ab),(ac,ab),(bc,ab),(ab,c),(ab,ac),(ab,bc)\}.$$

induce la siguiente relación de equivalencia:

$$a \sim a \quad b \sim b \quad c \sim c \quad a \sim b.$$

y la FD relación,

$$\mathcal{N}_{\sim} = \mathcal{N}_{|[a][c]|} \cup \{([a],[c]),([a],[ac])\}.$$

Por supuesto, considerando representantes de cada clase, se obtiene la siguiente FD relación con soporte $\{a,c\}$:

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_{|ac|} \cup \{(a,c),(a,ac)\}.$$

Considérese la FD relación $\mathcal{N}_{\sim}$, a partir de una función $f \in \lambda(\mathcal{N})$, se define la función $f_{\sim}: 2^{E'} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$f_{\sim}([A]) = f(A),$$

la cual es submodular y no decreciente, como se demuestra a continuación:

1. Sean $[A] \subseteq [B]$. Considérese el conjunto $B_A = \{y \in B;\ \exists x \in A,\ f(xy) = f(x) = f(y)\ \}$, luego $[B_A] = [A]$, así que $f_{\sim}([B_A]) = f_{\sim}([A])$, por tanto, $f(A) = f(B_A) \leq f(B)$ pues f es no decreciente, lo que implica que $f_{\sim}([A]) \leq f_{\sim}([B])$. Así que $f_{\sim}$ es no decreciente.

2. $f_{\sim}$ es submodular, pues

$$f_{\sim}([A] \cup [B]) + f_{\sim}([A] \cap [B]) = f(A \cup B) + f(A \cap B) \leq f(A) + f(B) = f_{\sim}([A]) + f_{\sim}([B]).$$

Además, es sencillo verificar, que $f_{\sim} \in \lambda(\mathcal{N}_{\sim})$.

Proposición 2.26. *Si $\sim$ es la relación de equivalencia en E, inducida por la FD relación $\mathcal{N}$ con soporte E, entonces, el espacio pretopológico (E',α) asociado a $\mathcal{N}_{\sim}$, es T_0.*

Demostración. Sean $[x]$, $[y] \in E'$ tales que $f_{\sim}([x],[y]) = f_{\sim}([x]) = f_{\sim}([y])$, lo que equivale a escribir $f(x,y) = f(x) = f(y)$, así que $x \sim y$, entonces $[x] = [y]$, luego E' es T_0. □

Proposición 2.27. *Sea $\sim$ la relación de equivalencia en E inducida por una FD relación. La función $q\colon E \longrightarrow E'$, que a cada $x \in E$, le asigna su clase de equivalencia $[x]$, es continua.*

Demostración. Para mostrar que q es continua, se usará la proposición 2.21. Sean $f_{\sim} \in \lambda(\mathcal{N}_{\sim})$ y Q la función de imágenes directas asociada a q. Si $A \in 2^E$, entonces $Q(A) = \{q(x);\ x \in A\ \} = [A]$, por lo tanto, $f_{\sim}(Q(A)) = f_{\sim}([A]) = f(A)$, donde $f \in \lambda(\mathcal{N})$. □

Ahora bien, considérese la función $i_{E'}: E' \longrightarrow E$, la cual asigna a cada $[x]$ un representante y, como se puede ver:

$$\begin{array}{rcccccc} q \circ i_{E'}: & E' & \longrightarrow & E & \longrightarrow & E' \\ & [x] & \longmapsto & y & \longmapsto & [y] = [x] \end{array} \qquad (2\text{-}3)$$

Por otro lado, considérese la función:

$$\begin{array}{rcccccl} g = i_{E'} \circ q\colon & E & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & [x] & \longmapsto & y \end{array} \tag{2-4}$$

Específicamente, $g(x) = y$, con $y \in [x]$. Por lo tanto, g es una función con la siguiente propiedad:

$$(g(x), x), (x, g(x)) \in \mathcal{N} \quad \text{para cada} \quad x \in E. \tag{2-5}$$

Este último resultado se puede interpretar como una versión vía FD relaciones y pretopologías, de un teorema debido a McCord [9], el cual enuncia, que todo espacio topológico finito es homotópicamente equivalente a un espacio T_0, ya que se ha demostrado, que existe un vínculo, (por medio de la funciones $i_{E'} \circ q$, $q \circ i_{E'}$), entre cada FD relación con soporte finito (y por tanto, su pretopología asociada) con una FD relación que representa una pretopología T_0. Se darán más detalles al respecto, en el siguiente capítulo.

2.4. La función f_Δ

En el ejemplo 1.9 (sección 1.2) se exhibe una función submodular de valor entero, asociada a un conjunto cualquiera $\Delta \subseteq 2^E$, función que se denota por f_Δ y que se define de la siguiente manera:

$$f_\Delta(I) = \sum_{J \in \Delta} q_J(I). \tag{2-6}$$

$f_\Delta(I)$ es el número de subconjuntos de Δ, que no contienen a $I \subseteq E$.

En adelante, el operador de clausura asociado a la FD relación $\mathcal{N}_{f_\Delta}$, se denota por c_{f_Δ}, y el conjunto de cerrados según c_{f_Δ}, se denota por $\mathcal{C}_{f_\Delta}$.

Lema 2.28. *Sean Δ, A, $B \in 2^E$. $f_\Delta(A \cup B) = f_\Delta(A)$ si, y sólo si $q_J(A \cup B) = q_J(A)$ para todo $J \in \Delta$.*

Demostración. Si $q_J(A \cup B) = q_J(A)$ para todo $J \in \Delta$, es claro que $f_\Delta(A \cup B) = f_\Delta(A)$, por definición. Ahora bien, considérese un conjunto arbitrario $J \in \Delta$, si $q_J(A \cup B) = 0$, entonces $A \subseteq A \cup B \subseteq J$, luego $q_J(A) = 0$, esto equivale a la implicación $q_J(A) = 1 \Rightarrow q_J(A \cup B) = 1$. Por otro lado, supóngase que $q_J(A \cup B) = 1$, por lo tanto $A \cup B \nsubseteq J$. Si se supone que $A \cup J$, se tendría $q_J(A) = 0$, pero por hipótesis, la cantidad de elementos en Δ que no contienen a A ni a $A \cup B$ es la misma, por lo tanto, debe existir $J' \in \Delta$ tal que $q_{J'}(A \cup B) = 0$ y $q'_J(A) = 1$, lo cual no puede ser, pues como ya se mencionó $q_{J'}(A \cup B) = 0 \Rightarrow q_{J'}(A) = 0$. Por lo que se demostró $q_J(A \cup B) = 1 \Rightarrow q_J(A) = 1$ (que equivale a $q_J(A) = 0 \Rightarrow q_J(A \cup B) = 0$).

□

Proposición 2.29. *El conjunto $\mathcal{C}_{f_\Delta}$ tiene las siguientes propiedades:*

1. $E \in \mathcal{C}_{f_\Delta}$

2. $\Delta \subseteq \mathcal{C}_{f_\Delta}$.

3. *Si* $P_1, P_2 \in \Delta$, *entonces* $P_1 \cap P_2 \in \mathcal{C}_{f_\Delta}$.

4. $A \in \mathcal{C}_{f_\Delta} - \{E\}$ *si, y sólo si, existe un conjunto* $\Delta_A \subseteq \Delta$ *tal que* $A = \bigcap_{P \in \Delta_A} P$.

Demostración.

1. $(E,E) \in \mathcal{N}_{f_\Delta}$, por lo que $c_{f_\Delta}(E) = E$.

2. Sea $A \in \Delta$, si $B \in 2^E$ es tal que $f_\Delta(A \cup B) = f_\Delta(A)$. Hay que demostrar que $B \subseteq A$. Considérese un elemento $b \in B$, por la transitividad en $\mathcal{N}_{f_\Delta}$ (axioma **(FD2)**) y el lema anterior, para todo $J \in \Delta$, se tiene $q_J(A \cup b) = q_J(A)$, en particular, $q_A(A \cup b) = q_A(A) = 0$, lo que implica $A \cup b \subseteq A$, por lo tanto, $b \in A$. Se concluye que $A \in \mathcal{C}_{f_\Delta}$

3. Sea $B \in 2^E$ tal que $f_\Delta((P_1 \cap P_2) \cup B) = f_\Delta(P_1 \cap P_2)$. Por el lema 2.30, se tiene

$$q_J((P_1 \cap P_2) \cup B) = q_J(P_1 \cap P_2), \quad \text{para todo } J \in \Delta.$$

En particular,

a) $q_{P_1}((P_1 \cap P_2) \cup B) = q_{P_1}(P_1 \cap P_2) = 0$,

b) $q_{P_2}((P_1 \cap P_2) \cup B) = q_{P_2}(P_1 \cap P_2) = 0$,

por lo tanto, $B \subseteq P_1$ y $B \subseteq P_2$, esto implica que $B \subseteq P_1 \cap P_2$, luego, por el corolario 2.13, $P_1 \cap P_2 \in \mathcal{C}_{f_\Delta}$.

4. Supóngase que $A \in \mathcal{C}_{f_\Delta}$, considérese el conjunto $K = \bigcap_{P \in \Delta_A} P$, donde $\Delta_A = \{P \in \Delta\ ; A \subseteq P\}$. Por la definición de K, es claro que $A \subseteq K$ (lo que implica que si $A \neq \varnothing$, entonces $\Delta_A, K \neq \varnothing$). Hace falta demostrar que $K \subseteq A$. Sea $x \in K$ y considérense los siguientes casos:

a) Si $J \in \Delta_A$, entonces $q_J(A) = 0$ y $q_J(x) = 0$, por lo tanto, $q_J(A \cup x) = 0$.

b) Si $J \in \Delta_A^c$, entonces $q_J(A) = 1$, en consecuencia $q_J(A \cup x) = 1$.

Por los dos casos anteriores, se tiene $q_J(A) = q_J(A \cup x)$ para cada $J \in \Delta$, por lo tanto, por el lema 2.28, $f_\Delta(A \cup x) = f_\Delta(A)$, pero $A \in \mathcal{C}_{f_\Delta}$, lo que implica, por el corolario 2.13, que $x \in A$. Recíprocamente, si $A = \bigcap_{P \in \Delta_A} P$ con $\Delta_A \subseteq \Delta$, por el ítem anterior, se tiene que $A \in \mathcal{C}_{f_\Delta}$.

$\square$

Ejemplo 2.30. $E = \{a,b,c\}$, $\Delta = \{b,ab,bc\}$

A	$\varnothing$	a	b	c	ab	ac	bc	abc
$f_\Delta(A)$	0	2	0	2	2	3	2	3

Tabla 2-9

De la tabla, se obtiene la siguiente FD relación:

$$\mathcal{N}_{f_\Delta} = \mathcal{N}_{|abc|} \cup \{(\varnothing,b),(a,b),(c,b),(a,ab),(c,bc),(ac,b),(ac,ab),(ac,bc),(ac,abc)\}.$$

Y de esta, los siguientes operador de clausura c_{f_Δ} y operador de interior i_{f_Δ}:

A	$\varnothing$	a	b	c	ab	ac	bc	abc
$c_{f_\Delta}(A)$	b	ab	b	bc	ab	abc	bc	abc
$i_{f_\Delta}(A)$	$\varnothing$	a	$\varnothing$	c	a	ac	c	ac

Tabla 2-10

De esta última tabla, se obtiene el conjunto de cerrados $\mathcal{C}_{f_\Delta} = \{b,ab,bc,abc\}$ y el conjunto de abiertos (una pretopología) $\mathcal{I}_{f_\Delta} = \{\varnothing,a,c,ac\}$.

Ahora, denotando a $\mathcal{I}_{f_\Delta}(A)$ por Δ_1, considérese f_{Δ_1}:

A	$\varnothing$	a	b	c	ab	ac	bc	abc
$f_{\Delta_1}(A)$	0	2	4	2	4	3	4	4

Tabla 2-11

La nueva FD relación a considerar es:

$$\mathcal{N}_{f_{\Delta_1}} = \mathcal{N}_{|abc|} \cup \left\{ \begin{array}{c} (b,a),(b,c),(b,ac),(bc,a),(ab,c),(bc,ac), \\ (bc,ab),(bc,abc),(ab,ac),(ab,bc),(ab,abc) \end{array} \right\}$$

Por último, obsérvese la tabla de $c_{f_{\Delta_1}}$ y $i_{f_{\Delta_1}}$. Nótese que, los respectivos conuntos de las imágenes de dichos operadores, topologías:

A	$\varnothing$	a	b	c	ab	ac	bc	abc
$c_{f_\Delta}(A)$	$\varnothing$	ab	b	bc	ab	abc	bc	abc
$i_{f_\Delta}(A)$	$\varnothing$	a	abc	c	abc	ac	abc	abc

Tabla 2-12

Proposición 2.31. *Sean $\mathcal{N}$ una FD relación con soporte E, $c_\mathcal{N}$ su operador de clausura inducido y $\mathcal{C}_\mathcal{N}$ el conjunto de cerrados según $c_\mathcal{N}$, se tiene:*

$$f_{\mathcal{C}_\mathcal{N}} \in \lambda(\mathcal{N}).$$

Demostración. Se demostrará que $\mathcal{N}_\Delta = \mathcal{N}$, donde $\Delta = \mathcal{C}_{f_\mathcal{N}}$.

$\subseteq$) Sea $(A,B) \in \mathcal{N}_\Delta$, es decir, $f_\Delta(A \cup B) = f_\Delta(A)$, por el lema 2.28, se tiene $q_J(A \cup B) = q_J(A)$ para todo $J \in \Delta$, en particular, $q_{c_\mathcal{N}(A)}(A \cup B) = q_{c_\mathcal{N}(A)}(A) = 0$, por lo tanto, $B \subseteq A \cup B \subseteq c_\mathcal{N}(A)$, esto implica que $(A,B) \in \mathcal{N}$.

$\supseteq$) Sea $(A,B) \in \mathcal{N}$, por la definición de $c_\mathcal{N}$, se tiene $B \subseteq c_\mathcal{N}(A)$, ahora bien, se va a demostrar que $q_J(A \cup B) = q_J(A)$ para todo $J \in \Delta$. En efecto, considérense los dos casos para $q_J(A)$:

1. $q_J(A) = 1 \Rightarrow A \nsubseteq J \Rightarrow A \cup B \nsubseteq J \Rightarrow q_J(A \cup B) = 1$.
2. $q_J(A) = 0 \Rightarrow A \subseteq J \Rightarrow B \subseteq c_\mathcal{N}(A) \subseteq J$, esto se tiene por **(CL1)** y **(CL3)**, por lo tanto $A \cup B \subseteq J$ y se tiene $q_J(A \cup B) = 0$.

Por 1. y 2. $q_J(A \cup B) = q_J(A)$ para todo $J \in \Delta$ y por el lema 2.28, $(A,B) \in \mathcal{N}_{f_\Delta}$.

$\square$

Capítulo 3

Topologías, FD relaciones y funciones submodulares

Como se mostró en el capítulo anterior, el conjunto de las FD relaciones con soporte E están en correspondencia biunívoca con el conjunto de las pretopologías en E, por lo que se puede decir, que una FD relación representa a una pretopología, y viceversa. Dicha correspondencia, se encontró gracias a los operadores de clausura y a los operadores de interior. Ahora bien, en [7] se demuestra que todo operador de clausura que satisfaga los axiomas

(CT1) $C(\varnothing) = \varnothing$,

(CT2) Para todo par $A, B \in 2^E$, $C(A \cup B) = C(A) \cup C(B)$,

determina una topología. Esto permite obtener una clasificación de las FD relaciones, pues cada una representa a una pretopología, pero aquella cuyo operador de clausura asociado satisface **(CT1)** y **(CT2)**, a una topología. Si τ es una topología, una FD relación que la representa es $\mathcal{N}_\tau$, gracias a la definición 2.9, dicho conjunto se denomina *FD relación topológica* y satisface las siguientes propiedades:

(FD4) si $(\varnothing, J) \in \mathcal{N}_\tau$ para algún $J \in 2^E$, entonces $J = \varnothing$,

(FD5) si $(I_1 \cup I_2, J) \in \mathcal{N}_\tau$, entonces existe un par de conjuntos J_1, $J_2 \in 2^E$ tales que $J = J_1 \cup J_2$, con $(J_k, I_k) \in \mathcal{N}_\tau$ para $k = 1, 2$.

Tal y como se puede comprobar en [11] o [14], trabajos en los que se demuestra además, que si una FD relación $\mathcal{N}$ satisface **(FD4)** y **(FD5)**, entonces $c_\mathcal{N}$ satisface **(CT1)** y **(CT2)**.

Ahora bien, se sabe que todo espacio topológico finito es al tiempo, un conjunto preordenado, así que debe existir una conexión entre los preórdenes y las FD relaciones topológicas. En este capítulo, se construye dicha conexión, por medio de la cual, se puedan describir algunos conceptos topológicos vía funciones submodulares, en especial, aquellos relacionados con el cálculo del tipo de homotopía en espacios topológicos finitos, también, se presentan algoritmos que calculan los valores de algunas funciones submodulares relacionadas con espacios topológicos finitos, y se interpreta el algoritmo de reducción de Stong [13], por medio de dichas funciones.

Las referencias para este capítulo son [2], [11] y [14].

3.1. FD relaciones topológicas y preórdenes

Una FD relación $\mathcal{N}$ con soporte E, se suele representar por medio de un grafo dirigido, en el que cada punto del mismo es asignado a un subconjunto de E, y la pareja $(I,J) \in \mathcal{N}$ se representa por medio de una flecha que parte de J y finaliza en I.

Por ejemplo, considérese la FD relación

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_{|abc|} \cup \{(a,b),\ (a,ab),(ac,b),\ (ac,bc),\ (ac,ab),\ (ac,abc)\}. \tag{3-1}$$

Su representación gráfica, contiene al diagrama de Hasse de la inclusión (la FD relación más pequeña que se puede definir en el conjunto $\{a,b,c\}$) y al siguiente diagrama:

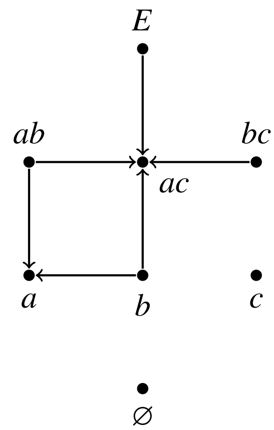


Figura 3-1

Obsérvese que existe una flecha de b a a, y que c no está unido a ningún otro elemento por medio de una flecha, excepto si se considera el diagrama de Hasse de la inclusión. Se podría pensar en un preorden en $\{a,b,c\}$, inducido por el digrafo anterior.

Para la FD relación $\mathcal{N}$ con soporte E, se define la relación $\leq_{\mathcal{N}}$ en E, de la siguiente manera:

$$x \leq_{\mathcal{N}} y \ \Leftrightarrow\ (x,y) \in \mathcal{N}. \tag{3-2}$$

La cual resulta ser un preorden, pues tanto la reflexividad, como la transitividad de $\leq_{\mathcal{N}}$, se heredan de la reflexividad y la transitividad de $\mathcal{N}$ (axiomas **(FD1)** y **(FD2)** respectivamente).

Así que, el preorden definido por la FD relación (3-1), es:

$$a \leq a \quad b \leq b \quad c \leq c \quad a \leq b.$$

Como se verá en el ejemplo siguiente, se puede dar que dos FD relaciones con soporte E, definan un mismo preorden en E.

Ejemplo 3.1. *Considere la FD relación*

$$\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_{|abc|} \cup \left\{ \begin{array}{c} (a,b),(a,ab),(ac,b),(ac,ab),(ac,abc), \\ (ab,c),(ab,ac),(ab,bc),(ab,abc),(a,abc) \end{array} \right\}.$$

Como se puede ver, el preorden $\leq_{\mathcal{N}_1}$ es:

$$a \leq_{\mathcal{N}_1} a, \quad b \leq_{\mathcal{N}_1} b, \quad c \leq_{\mathcal{N}_1} c, \quad a \leq_{\mathcal{N}_1} b.$$

El cual también es inducido por

$$\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_{|abc|} \cup \{(a,b),(a,ab),(ac,b),(ac,ab),(ac,abc)\}.$$

Además, se puede pensar en una FD relación definida por medio de un preorden $\leq$, que satisfaga la propiedad de ser la más pequeña que induzca a $\leq$. Para dicho propósito, se define el siguiente conjunto:

$$\mathcal{N}_{\leq} := \{(I,J) \in 2^E \times 2^E;\ \ \forall y \in J\ \exists x \in I,\ \ x \leq y\}.$$

Proposición 3.2. *$\mathcal{N}_{\leq}$ es una FD relación.*

Demostración.

(FD1) Si $J \subseteq I \subseteq E$, como $\leq$ es reflexiva, para cada $y \in J$ se tiene $y \leq y$, en consecuencia

$$(I,J) \in \mathcal{N}_{\leq}.$$

(FD2) Si (I,J), $(J,K) \in \mathcal{N}_{\leq}$, entonces, por definición, para cada $y \in J$, existe $x \in I$ tal que $x \leq y$ y para cada $z \in K$, existe $y' \in J$ tal que $y' \leq z$. Por la transitividad de $\leq$, para todo $z \in K$, existe $x \in I$ tal que $x \leq z$, por lo tanto,

$$(I,K) \in \mathcal{N}_{\leq}.$$

(FD3) Si (I,J), $(I,K) \in \mathcal{N}_{\leq}$, entonces, por la misma definición de $\mathcal{N}_{\leq}$ se ve que

$$(I,J \cup K) \in \mathcal{N}_{\leq}.$$

□

$\mathcal{N}_{\leq}$ se compone de dos partes, una es $\mathcal{N}_{|E|}$ que fué introducida en el capítulo 1, la cual está contenida en toda FD relación con soporte E y contiene a los elementos dados por **(FD1)** (o equivalentemente, por la reflexividad de $\leq$), la otra se notará $\mathcal{N}_{<}$ y contiene a los elementos inducidos por **(FD2)**, **(FD3)** (o por la transitividad de $\leq$) y diferenciará una FD relación topológica de otra. Por todo lo anterior, se tiene

$$\mathcal{N}_{\leq} = \mathcal{N}_{|E|} \cup \mathcal{N}_{<}.$$

y dicha unión es disjunta.

Es claro que el preorden inducido por $\mathcal{N}_{\leq}$, es $\leq$, pues:

$$x \leq y \Leftrightarrow (x,y) \in \mathcal{N}_{\leq} \Leftrightarrow x \leq_{\mathcal{N}_{\leq}} y.$$

Ejemplo 3.3. *Considérese el siguiente preorden definido en el conjunto $\{a,b,c\}$:*

$$a \leq a, \quad b \leq b, \quad c \leq c, \quad b \leq a, \quad c \leq a.$$

Su FD relación asociada es $\mathcal{N}_{\leq} = \mathcal{N}_{|abc|} \cup \mathcal{N}_{<}$, donde

$$\mathcal{N}_{<} = \{(b,a),(c,a),(b,ab),(c,ac),(bc,a),(bc,ab),(bc,ac),(bc,abc)\}.$$

Proposición 3.4. *Si $\mathcal{N}'$ es una FD relación y $\leq_{\mathcal{N}'}$ es su preorden inducido, entonces,*

$$\mathcal{N}_{\leq_{\mathcal{N}'}} \subseteq \mathcal{N}'.$$

Demostración. Si $(I,J) \in \mathcal{N}_{\leq_{\mathcal{N}'}}$, entonces, para todo $y \in J$ existe $x \in I$ tal que $x \leq_{\mathcal{N}'} y$, o lo que es lo mismo, $(x,y) \in \mathcal{N}'$, pero esto implica que $(I,y) \in \mathcal{N}'$, para todo $y \in J$, por **(FD1)** y **(FD2)**. Luego, por **(FD3)**, se tiene:

$$(I, \bigcup_{y \in J}\{y\}) = (I,J) \in \mathcal{N}'.$$

□

Proposición 3.5. *Si $\mathcal{N}_{\tau}$ es una FD relación topológica y $\leq$ su preorden asociado, entonces*

$$\mathcal{N}_{\tau} = \mathcal{N}_{\leq}.$$

Demostración. Sean $I = \{x_1,\ldots,x_n\}$, $J = \{y_1,\ldots y_m\}$, tales que $(I,J) \in \mathcal{N}_{\tau}$. Esto se tiene si, y sólo si, $J \subseteq c_{\tau}(I)$, lo cual equivale a $(I,y_j) \in \mathcal{N}$ para todo $j = 1,2,\ldots,m$, lo que también equivale a tener

$$y_j \in c_{\tau}(I) = c_{\tau}\left(\bigcup_{i=1}^{n} x_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} c_{\tau}(x_i) \qquad \text{para todo } j = 1,2,\ldots,m. \quad (\text{Por } \textbf{(CT2)}).$$

Es decir, $y_j \in c_{\tau}(x_i)$ para algún $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, para todo $j = \{1,2,\ldots,m\}$, dicho de otra forma: para todo $y \in J$, existe $x \in I$ tal que $x \leq y$, esto es $(I,J) \in \mathcal{N}_{\leq}$ (pues $y_j \in c_{\tau}(x_i) \Leftrightarrow x_i \leq y_j$).

□

Por las proposiciones 3.4 y 3.5, se tiene que toda FD relación topológica induce y es inducida, por un preorden (lo mismo que una topología finita) y que además, es la FD relación más pequeña con esa propiedad. Se puede apreciar que la definición de $\mathcal{N}_{\leq}$ provee de una sencilla descripción de las FD relaciones topológicas, la cual se aprovechará, para demostrar que algunos conceptos bien conocidos referentes a espacios topológicos finitos, pueden ser considerados como casos particulares de las caracterizaciones dadas en el capítulo 2. Más precisamente, considerando la FD relación topológica $\mathcal{N}_{\leq}$, se tiene que:

1. E es un espacio topológico conexo si, y sólo si, para cualesquier $x,y \in E$ existe un conjunto $\{x_1,x_2,..,x_n\}$ de elementos de E, tal que $x = x_1$, $y = x_n$ y
$$x_i \leq x_{i+1} \text{ o } x_{i+1} \leq x_i,$$
donde $\leq$ es el preorden asociado a E. Lo cual surge como caso particular de la proposición 2.16.

2. Un espacio topológico finito E, es conexo si, y sólo si, es conexo por caminos. Gracias a las proposiciones 2.15 y 2.16.

3. Un espacio topológico finito es T_0 si, y sólo si, $y \leq x$ y $x \leq y$ únicamente cuando $x = y$. Tomando en consideración la proposición 2.23.

4. Una función entre espacios topológicos finitos es continua si, y sólo si, preserva el preorden. En efecto, por la proposición 2.19, si E_1, E_2 son espacios topológicos finitos, con preórdenes asociados $\leq_1$ y $\leq_2$ respectivamente, entonces, $g : E_1 \longrightarrow E_2$ es una función continua si, y sólo si, $(x,y) \in \mathcal{N}_{\leq_1}$ implica $(g(x),g(y)) \in \mathcal{N}_{\leq_2}$.

En [2], [8], [9] y [13] se encuentran las demostraciones de los hechos anteriores mencionando únicamente preórdenes y propiedades topológicas.

3.2. Funciones submodulares y topologías finitas

Si $f \in \lambda(\mathcal{N})$, $(A,B) \in \mathcal{N}$ equivale a tener $f(A) = f(A \cup B)$ por la proposición 1.7. En particular, considerando una topología τ y su preorden $\leq$, si $f \in \lambda(\mathcal{N}_\tau)$ y $(x,y) \in \mathcal{N}_\tau$, entonces:

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = f(xy). \tag{3-3}$$

Por esto, y por lo visto en la sección anterior, cada noción topológica posee una descripción (numérica) vía funciones submodulares. Así pues, por medio de las imágenes de dichas funciones, es posible determinar si, por ejemplo, un subconjunto es cerrado, abierto, conexo, si un espacio finito dado es T_0, o si una función de un espacio topológico en otro, es continua (como se hizo en el capítulo 2). Sin embargo, el conjunto $\lambda(\mathcal{N}_{\leq})$ posee múltiples opciones, ya que varias funciones submodulares pueden definir la misma FD relación. Es más, dicho conjunto es infinito, tal como se demuestra en [11]. En el capítulo 1, se mencionó que los cerrados de un espacio topológico finito, conforman una topología, a saber, su topología opuesta, por lo tanto, gracias a la proposición 2.31, se tiene

$$f_{\tau^{op}} \in \lambda(\mathcal{N}_\tau). \tag{3-4}$$

Donde τ^{op} denota la topología opuesta de τ como se comentó en el capítulo 1. Cuando el espacio topológico es T_0, su preorden asociado es en particular, un orden y como se dijo anteriormente, se puede representar por un diagrama de Hasse. Por lo tanto, resulta útil la información que provee la tabla de una función submodular en $\lambda(\mathcal{N}_\tau)$ para determinar ciertas características de los diagramas de Hasse de los posets, es más, basta considerar únicamente las imágenes de los conjuntos unitarios y los de cardinal dos. De aquí en adelante, sólo se consideran espacios T_0 a menos que se advierta lo contrario.

Proposición 3.6. *Sean $\mathcal{N}_\tau$ una FD relación topológica con soporte E y $\leq$ su relación de orden asociada. Si $f \in \lambda(\mathcal{N}_\tau)$ y $x, y \in E$, entonces*

1. *$f(xy) = f(x)$ si, y sólo si, $x \leq y$.*
2. *$f(xy) = f(x)$ para todo $y \in E$ si, y sólo si, x es un mínimo.*
3. *$f(xy) = f(x)$ para todo $x \in E$ si, y sólo si, y es un máximo.*
4. *Si $f(x) = f(y)$, entonces x e y son no comparables.*

Demostración.

1. $f(xy) = f(x)$ si, y sólo si, $(x,y) \in \mathcal{N}_\tau$ si, y sólo si, $x \leq y$.
2. Por el ítem anterior, $f(xy) = f(x)$ para todo $y \in E$, equivale a tener que x es mínimo.
3. La demostración de este ítem es similar a la del ítem anterior.
4. Si $f(x) = f(y)$ y $x \neq y$, entonces $f(xy) \neq f(x)$ y $f(xy) \neq f(y)$, pues de lo contrario, se tendría $x \leq y$ e $y \leq x$, respectivamente, lo que no puede ser ya que $\leq$ es un orden.

□

Ejemplo 3.7. *Sea $\tau = \{\varnothing, c, d, cd, bcd, abcd\}$, por lo que $\tau^{op} = \{\varnothing, a, ab, abc, abd, abcd\}$ y considérese la función submodular $f_{\tau^{op}}$:*

A	$\varnothing$	a	b	c	d	ab	ac	ad	bc	bd	cd	abc	abd	acd	bcd	$abcd$
$f_{\tau^{op}}(A)$	0	1	2	4	4	2	4	4	4	4	5	4	4	5	5	5

Tabla 3-1

- *a es máximo, pues de la tabla se ve que $f_{\tau^{op}}(ax) = f_{\tau^{op}}(x)$ para todo $x \in \{a,b,c,d\}$.*
- *b es mayor que c y d ya que $f_{\tau^{op}}(c) = 4 = f_{\tau^{op}}(bc)$ y $f_{\tau^{op}}(d) = 4 = f_{\tau^{op}}(bd)$*
- *c y d son no comparables, pues $f_{\tau^{op}}(c) = 4 = f_{\tau^{op}}(d)$.*

Por lo que el diagrama de Hasse de abc con el preorden inducido por $f_{\tau^{op}}$ es

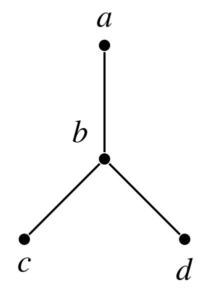


Figura 3-2

Ya se mencionó que existen cuatro conjuntos notables asociados a un espacio topológico finito (E,τ). A saber, el mismo τ, su base minimal $\mathcal{U}$, τ^{op} y la base minimal de (E,τ^{op}), la cual se denota por $\mathcal{D}$. A pesar de que no es cierto en general, que $f_\tau \in \lambda(\mathcal{N}_\tau)$, pues no siempre se tiene $\tau = \tau^{op}$, es posible describir el preorden $\leq$ asociado a τ por medio de dicha función, de hecho, lo mismo ocurre con las funciones submodulares no decrecientes $f_{\mathcal{U}}$ y $f_{\mathcal{D}}$ (funciones del tipo f_Δ), gracias a la proposición 3.8 y a la observación 3.10.

Proposición 3.8. *Si (E,τ) es un espacio topológico finito y $\mathcal{D}$ es la base minimal de τ^{op}, entonces*

$$f_{\tau^{op}}(xy) = f_{\tau^{op}}(x) \Leftrightarrow f_{\mathcal{D}}(xy) = f_{\mathcal{D}}(x).$$

Demostración.

$\Rightarrow$) $f_{\tau^{op}}(xy) = f_{\tau^{op}}(x)$ equivale a $q_J(xy) = q_J(x)$ para todo $J \in \tau^{op}$, lo que implica, en particular, que $q_{J'}(xy) = q_{J'}$ para todo $J' \in \mathcal{D}$, que es equivalente a $f_{\mathcal{D}}(xy) = f_{\mathcal{D}}(x)$.

$\Leftarrow$) $f_{\mathcal{D}}(xy) = f_{\mathcal{D}}(x)$ equivale a $q_{J'}(xy) = q_{J'}(x)$ para todo $J' \in \mathcal{D}$, en particular, $y \in F_x$, así que $x \leq y$, por lo tanto $(x,y) \in \mathcal{N}_\tau$, luego $f_{\tau^{op}}(xy) = f_{\tau^{op}}(x)$.

□

Se ha demostrado que la función $f_{\mathcal{D}}$ describe el preorden de la topología τ, donde $\mathcal{D}$ es la base minimal de τ^{op}. Sin embargo, dicha función, en general no pertenece a $\lambda(\mathcal{N}_\tau)$, como se verá en el ejemplo 3.9.

Ejemplo 3.9. *Considérese la base minimal de la topología representada por el poset del ejemplo 3.7. La base minimal $\mathcal{D}$ de τ^{op}, se compone de los siguientes elementos:*

$$F_a = \{a\}, \quad F_b = \{a,b\} \quad F_c = \{a,b,c\} \quad F_d = \{a,b,d\}.$$

Por lo tanto, la función $f_{\mathcal{D}}$ es:

A	$\varnothing$	a	b	c	d	ab	ac	ad	bc	bd	cd	abc	abd	acd	bcd	$abcd$
$f_{\mathcal{D}}(A)$	0	0	1	3	3	1	3	3	3	3	4	3	3	4	4	4

Tabla 3-2

De la tabla 3-2 se observa que $(\varnothing,a) \in \mathcal{N}_{f_{\mathcal{D}}}$, pues $f_{\mathcal{D}}(\varnothing) = f_{\mathcal{D}}(a)$. Sin embargo, de la tabla 3-1, se observa que $f_{\tau^{op}}(a) = 1 \neq 0 = f_{\tau^{op}}(\varnothing)$, por lo tanto, $(\varnothing,a) \notin \mathcal{N}_{\tau^{op}}$. Lo anterior muestra que $f_{\mathcal{D}} \notin \mathcal{N}_{\tau}$, además, que $\mathcal{N}_{f_{\mathcal{D}}}$ no es topológica.

Las función submodular $f_{\mathcal{D}}$ es adecuada para caracterizar algunas nociones de un espacio topológico (E,τ), pues aunque no necesariamente pertenece a $\lambda(\mathcal{N}_{\tau})$, determina si dos elementos son comparables o no en dicha topología y en este sentido, cumple la misma función que $f_{\tau^{op}}$, pero su construcción es más sencilla.

Observación 3.10.

1. Considerando al espacio topológico (E,τ^{op}), donde $\mathcal{C}_{\tau} = \tau^{op}$ (esto es, los cerrados de (E,τ)), se tiene que $f_{\tau} \in \lambda(\mathcal{N}_{\tau^{op}})$, entonces, por la proposición 3.8:

$$y \leq x \Leftrightarrow f_{\tau}(xy) = f_{\tau}(x) \Leftrightarrow f_{\mathcal{U}}(xy) = f_{\mathcal{U}}(x).$$

   Donde $\leq$ es el preorden asociado a τ.

2. Una función submodular no decreciente $f : E \longrightarrow \mathbb{Z}$, pertenece a $\lambda(\mathcal{N}_{\tau})$ para alguna topología τ si, y sólo si, f satisface las siguientes propiedades:

   (ST1) Si $I \in 2^E$ y $f(I) = f(\varnothing)$, entonces $I = \varnothing$.

   (ST2) Si $f(I_1 \cup I_2) = f(I_1 \cup I_2 \cup J)$, entonces existe un par de conjuntos $J_1, J_2 \in 2^E$ tal que, $J = J_1 \cup J_2$, con $f(I_k) = f(I_k \cup J_k) \in \mathcal{N}_{\tau}$ para $k = 1,2$.

   En efecto, si f satisface **(ST1)** y **(ST2)**, entonces la FD relación $\mathcal{N}_f$ es topológica, por lo tanto, su operador de clausura $c_{\mathcal{N}_f}$ satisface **(CT1)** y **(CT2)**, lo cual es sencillo de verificar. Además, si $f \in \lambda(\mathcal{N}_{\tau})$ para alguna topología τ, por el comentario hecho al principio del capítulo, $\mathcal{N}_{\tau}$ satisface **(FD4)** y **(FD5)**, lo que en términos de f, respectivamente equivalen a **(ST1)** y **(ST2)** ya que $(A,B) \in \mathcal{N}_{\tau}$ equivale a $f(A \cup B) = f(A)$.

3. Si una función submodular no decreciente f satisface **(ST1)** y **(ST2)**, por el ítem anterior, induce una FD relación topológica $\mathcal{N}_\tau$, la que a su vez, induce al preorden asociado a τ, por lo que en términos de f, es posible hallar las bases minimales $\mathcal{U}$ y $\mathcal{D}$. En efecto, sea $x \in E$, como $f(xy) = f(x) \Leftrightarrow x \leq y$, entonces:

$$U_x = \{y \in E; f(xy) = f(y)\} \quad \text{y} \quad F_x = \{y \in E; f(xy) = f(x)\}.$$

Ejemplo 3.11. *Considerando los datos de la tabla 3-3*

A	$\varnothing$	a	b	c	ab	ac	bc	abc
$f(A)$	0	5	3	3	5	5	5	5

Tabla 3-3

*Se verifica que f satisface **(ST1)** y **(ST2)**. Además,*

$$U_a = a, \quad U_b = ab, \quad U_c = ac, \quad F_a = abc, \quad F_b = b, \quad F_c = c.$$

Por lo tanto,

A	$\varnothing$	a	b	c	ab	ac	bc	abc
$f_{\mathcal{U}}(A)$	0	0	2	2	2	2	3	3
$f_{\mathcal{D}}(A)$	0	2	1	1	2	2	2	2

Tabla 3-4

3.3. Cálculo de tipos de homotopía mediante funciones submodulares

En el capítulo 2, se demostró que toda FD relación $\mathcal{N}$ con soporte E, induce otra FD relación $\mathcal{N}_\sim$, cuyo soporte es E', asociada a una pretopología T_0. Ahora bien, considérese una FD relación topológica $\mathcal{N}_\tau$, y la función $q{:}E \longrightarrow E'$, la cual, es continua (proposición 2.29), considérese además, la inclusión $i_{E'}{:}E' \longrightarrow E$. Se demostró que la función $g = i_{E'} \circ q$ satisface la siguiente propiedad:

$$(g(x),x),(x,g(x)) \in \mathcal{N}_\leq \quad \text{para cada} \quad x \in E. \tag{3-5}$$

En particular, $g \leq id_E$ en el espacio de las funciones continuas de E en E, es decir, $id_E \cong E$ (rel E') gracias a la proposición 1.33, lo que implica que E' es un retracto por deformación fuerte de E. Este es un resultado debido a McCord [9], el cual puede ser enunciado de la siguiente manera:

Proposición 3.12 (McCord)**.** *Para cada espacio topológico finito E, existe un espacio topológico finito E' que es T_0 y es homotópicamente equivalente a E.*

Esto implica, que para estudiar los tipos de homotopía de los espacios finitos, basta considerar los espacios T_0. Ahora bien, Stong [13] encuentra un interesante y sencillo método para clasificar los espacios T_0 por tipo de homotopía, simplemente hay que identificar algunos puntos particulares, a saber, los beat points (b.p.), cuya definición se dio en el capítulo 1.

Proposición 3.13 (Stong [13])**.** *Sean E un espacio topológico finito T_0 y $x \in E$ un beat point. $E \setminus \{x\}$ es un retracto por deformación fuerte de E.*

Demostración. Véase [2], [8] o [13]. □

De hecho, Stong prueba que todo espacio topológico finito posee un core, para lo cual procede por inducción, identificando y removiendo en cada paso inductivo, un b.p. con lo que sugiere un algoritmo que que termina cuando se encuentra un espacio minimal, esto es, un core del espacio original, después demuestra, que los cores de un espacio finito, son homeomorfos, y que dos espacios topológicos finitos son del mismo tipo homotópico si, y sólo si, sus cores son homeomorfos.

Gráficamente, x es un up beat point (u.b.p.), si existe una, y solo una arista por encima de él en el diagrama de Hasse. Además, y es un down beat point (d.b.p.), si existe que una, y solo una arista por debajo de y. En la siguiente proposición, se caracterizan estos conceptos por medio de las funciones submodulares.

Proposición 3.14. *Si $f \in \lambda(\mathcal{N}_\tau)$, entonces:*

1. *$x \in E$ es un u.b.p. si, y sólo si, existe un $y \in E \setminus \{x\}$ con $f(xy) = f(x)$ tal que para todo $z \in E \setminus \{x\}$ con $f(xz) = f(x)$, se tiene $f(yz) = f(y)$.*

2. *$x \in E$ es un d.b.p. si, y sólo si, existe un $y \in E \setminus \{x\}$ con $f(xy) = f(y)$ tal que para todo $z \in E \setminus \{x\}$ con $f(xz) = f(y)$, se tiene $f(yz) = f(z)$.*

Demostración. Como $y \leq x \Leftrightarrow f(xy) = f(x)$, los enunciados 1. y 2. son interpretaciones, vía funciones submodulares, de la definición 1.36. □

Ejemplo 3.15. *Considérese la topología $\tau = \{\varnothing, c, d, cd, bcd, abcd\}$ en el conjunto $\{a,b,c,d\}$. Solamente se consideran las imágenes, por medio de $f_{\tau^{op}}$, de los conjuntos unitarios y de los conjuntos de dos elementos.*

A	a	b	c	d	ab	ac	ad	bc	bd	cd
$f_{\tau^{op}}(A)$	1	2	4	4	2	4	4	4	4	5

Tabla 3-5

- *b no es d.b.p ya que $f_{\tau^{op}}(bc) = f_{\tau^{op}}(c)$ y $f_{\tau^{op}}(bd) = f_{\tau^{op}}(d)$, pero $f_{\tau^{op}}(c) = f_{\tau^{op}}(d)$, por lo que en términos del preorden, b es mayor que c y d, pero estos últimos son no comparables, como se verifica en la tabla.*
- *a es d.b.p. ya que tanto c como d cumplen las condiciones $f_{\tau^{op}}(ac) = f_{\tau^{op}}(c)$ y $f_{\tau^{op}}(ad) = f_{\tau^{op}}(d)$ pero $f_{\tau^{op}}(ab) = f_{\tau^{op}}(b)$, $f_{\tau^{op}}(bc) = f_{\tau^{op}}(c) > f_{\tau^{op}}(b)$ y $f_{\tau^{op}}(bd) = f_{\tau^{op}}(d) > f_{\tau^{op}}(b)$.*

Lo que bien se puede comprobar al ver el diagrama de Hasse asociado a τ.

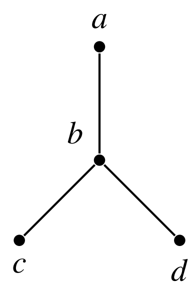


Figura 3-3

Proposición 3.16. *Sean $x \in E$, $\mathcal{U}$ base de (E,τ) y $\mathcal{D}$ base de (E,τ^{op}), entonces:*

1. *x es un u.b.p si, y sólo si, existe $y \in E \setminus \{x\}$ tal que*

$$f_{\mathcal{U}}(xy) = f_{\mathcal{U}}(y) \quad y \quad f_{\mathcal{U}}(y) - f_{\mathcal{U}}(x) = 1.$$

2. *x es un d.b.p si, y sólo si, existe $y \in E \setminus \{x\}$ tal que*

$$f_{\mathcal{D}}(xy) = f_{\mathcal{D}}(y) \quad y \quad f_{\mathcal{D}}(y) - f_{\mathcal{D}}(x) = 1.$$

Demostración.

1. Si x es un u.b.p. existe $y \in E \setminus \{x\}$ con $x \in U_y$, tal que para todo $z \in E \setminus \{x\}$, con $x \in U_z$, se tiene $y \in U_z$. Esto equivale a escribir:

$$x \in U_z \Leftrightarrow y \in U_z, \text{ para todo } z \in E \setminus \{x\}.$$

Por lo tanto, $q_{U_z}(x) = q_{U_z}(y)$ para todo $z \in E \setminus \{x\}$, esto implica, que U_x es el único abierto minimal que contiene a x, pero no a y, en consecuencia, se tiene:

$$f_{\mathcal{U}}(y) = f_{\mathcal{U}}(x) + 1.$$

Recíprocamente, supóngase que $f_{\mathcal{U}}(xy) = f_{\mathcal{U}}(y)$ y $f_{\mathcal{U}}(y) - f_{\mathcal{U}}(x) = 1$. Esto implica que U_x es el único abierto minimal que contiene a x pero no a y. Si $z \in E \setminus \{x\}$ satisface $x \leq z$, entonces $y \leq z$ pues de lo contrario, U_z sería otro abierto minimal que contiene a x, pero no a y, lo que no puede suceder, así que x es un u.b.p.

2. La demostración de este ítem es completamente análoga a la del ítem anterior

□

Sean $I \in 2^E$, (E,τ) un espacio topológico finito T_0 y $\leq$ su orden asociado, recuérdese que $f_{\mathcal{U}}(I)$ y $f_{\mathcal{D}}(I)$ son, respectivamente, el número de abiertos y de cerrados en (E,τ) que no contienen a I. Denotando por U_X, al conjunto de todos los elementos en E que son menores que todo elemento de X y por F_X, al conjunto de todos los elementos en E que son mayores que todo elemento en X, se tiene que $f_{\mathcal{U}}(I) = E - |F_X|$ y $f_{\mathcal{D}}(I) = E - |U_X|$. Lo anterior se aprovecha, para definir los siguientes dos algoritmos, que calculan las funciones mencionadas.

Algoritmo 1 La función $f_{\mathcal{U}}$

Entrada: Espacio topológico finito E.
Salida: Función $f_{\mathcal{U}}$.

```
f_U(∅) ← 0
Calcular |E|.
S ← 2^E.
mientras S ≠ ∅ hacer
    Elegir un conjunto A ∈ S
    X ← A
    Calcular |F_X|
    f_U(X) ← |E| − |F_X|
    S ← S − {X}
fin mientras
```

El algoritmo para la función $f_{\mathcal{D}}$ es completamente análogo:

Algoritmo 2 La función $f_{\mathcal{D}}$

Entrada: Espacio topológico finito E.
Salida: Función $f_{\mathcal{D}}$.

```
f_D(∅) ← 0
Calcular |E|.
S ← 2^E ∖ {∅}.
mientras S ≠ ∅ hacer
    Elegir un conjunto A ∈ S
    X ← A
    Calcular |U_X|
    f_D(X) ← |E| − |U_X|
    S ← S − {X}
fin mientras
```

Ejemplo 3.17. *Sea $E = \{a,b,c,d\}$ y considérese el siguiente diagrama de Hasse:*

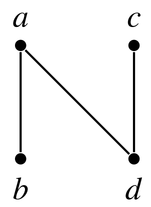


Figura 3-4

Por ejemplo, se tiene $|F_a| = 1$, $|U_a| = 3$, $|F_{abc}| = 0$, $|U_{abc}| = 0$, luego, $f_{\mathcal{U}}(a) = |E| - |F_a| = 4-1 = 3$, $f_{\mathcal{D}}(a) = |E| - |U_a| = 4-3 = 1$, $f_{\mathcal{U}}(abc) = |E| - |F_{abc}| = 4$ y $f_{\mathcal{D}}(abc) = |E| - |U_{abc}| = 4$. Con la ayuda de los algoritmos 1 y 2, se calculan los valores de las funciones $f_{\mathcal{U}}(A)$ y $f_{\mathcal{D}}(A)$:

A	$\varnothing$	a	b	c	d	ab	ac	ad	bc	bd	cd	abc	abd	acd	bcd	$abcd$
$f_{\mathcal{U}}(A)$	0	3	2	3	1	3	4	3	4	3	3	4	3	4	4	4
$f_{\mathcal{D}}(A)$	0	1	3	2	3	3	3	3	4	4	3	4	4	3	4	4

Tabla 3-6

El siguiente algoritmo, permite encontrar el core de un espacio topológico finito (E,τ), el cual se construye de forma numérica gracias a las funciones $f_{\mathcal{U}}$ y $f_{\mathcal{D}}$. Recuérdese el algoritmo de Stong, es un método de reducción, en el hay que encontrar en cada paso, un beat point cualquiera, (por lo que no existe una única manera de realizar las reducciones), para luego removerlo del espacio, hasta encontrar su core.

Algoritmo 3 Core de E

Entrada: Espacio topológico finito (E,τ).
Salida: Core de E.

$S \leftarrow E$
Calcular $f_{\mathcal{U}}$ y $f_{\mathcal{D}}$ sobre 2^S, mediante los algoritmos 1 y 2 respectivamente.
mientras Sea posible encontrar un $x \in S$ tal que exista $y \in S$, que satisfagan

$$f_{\mathcal{U}}(xy) = f_{\mathcal{U}}(x) \quad \text{y} \quad f_{\mathcal{U}}(y) - f_{\mathcal{U}}(x) = 1.$$

o

$$f_{\mathcal{D}}(xy) = f_{\mathcal{D}}(y) \quad \text{y} \quad f_{\mathcal{D}}(y) - f_{\mathcal{D}}(x) = 1.$$

hacer
    $S \leftarrow S - \{x\}$
fin mientras

Ejemplo 3.18. *Considérese el diagrama del ejemplo anterior, y de la tabla 3-6, obsérvese que b es un u.b.p. ya que* $f_{\mathcal{U}}(a) = f_{\mathcal{U}}(ab)$ *y* $f_{\mathcal{U}}(a) - f_{\mathcal{U}}(b) = 1$. *Al remover b, la tabla para las nuevas funciones* $f_{\mathcal{U}_1}$ *y* $f_{\mathcal{D}_1}$ *en* $E_1 = \{a,c,d\}$, *es:*

A	$\varnothing$	a	c	d	ac	ad	cd	acd
$f_{\mathcal{U}_1}(A)$	0	2	2	0	3	2	2	3
$f_{\mathcal{D}_1}(A)$	0	1	1	2	2	2	2	2

Tabla 3-7

Los nuevos cálculos revelan que c es un d.b.p., pues $f_{\mathcal{D}_1}(cd) = f_{\mathcal{D}_1}(d)$ *y* $f_{\mathcal{D}_1}(d) - f_{\mathcal{D}_1}(c) = 1$. *Al remover c, la tabla para las nuevas funciones* $f_{\mathcal{U}_2}$ *y* $f_{\mathcal{D}_2}$ *en* $E_2 = \{a,d\}$, *es:*

A	$\varnothing$	a	d	ad
$f_{\mathcal{U}_2}(A)$	0	1	0	1
$f_{\mathcal{D}_2}(A)$	0	0	1	1

Tabla 3-8

Los nuevos cálculos revelan que tanto a, como d son b.p., por lo tanto, al remover alguno de dichos dos puntos, se obtiene un espacio de un punto E_3, *y se concluye, que el espacio original, es contráctil (proposición 1.30). Para ilustrar el cálculo que se acaba de hacer, obsérvese la siguiente figura:*

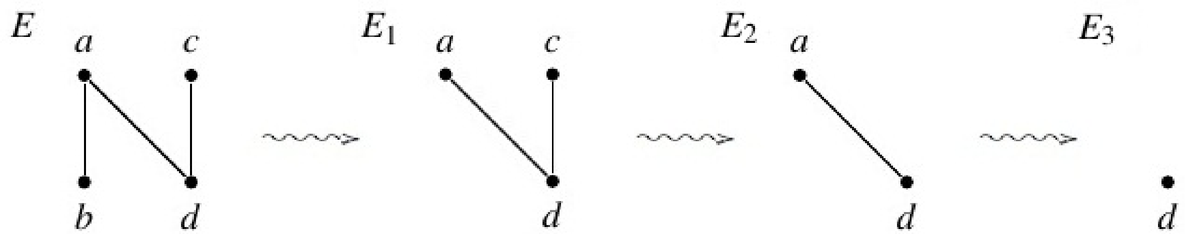


Figura 3-5

3.3.1. Espacios de 3 elementos

Las topologías finitas no homeomorfas que se pueden definir en un conjunto $\{a,b,c\}$ son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \{\varnothing,\{a,b,c\}\}\\
\tau_2 &= \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}\\
\tau_3 &= \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}\\
\tau_4 &= \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}\\
\tau_5 &= \{\varnothing,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}\\
\tau_6 &= \{\varnothing,\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}\\
\tau_7 &= \{\varnothing,\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}\\
\tau_8 &= \{\varnothing,\{a,b\},\{a,b,c\}\}\\
\tau_9 &= \{\varnothing,\{a\},\{a,b,c\}\}
\end{aligned}$$

La siguiente tabla muestra los valores de las funciones f_{τ_i} para $i = 1,2,\ldots,9$:

A	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$
$f_{\tau_1}(A)$	0	1	1	1	1	1	1	1
$f_{\tau_2}(A)$	0	4	4	4	6	6	6	7
$f_{\tau_3}(A)$	0	3	2	4	4	5	4	5
$f_{\tau_4}(A)$	0	2	2	4	3	4	4	4
$f_{\tau_5}(A)$	0	1	3	3	3	3	4	4
$f_{\tau_6}(A)$	0	2	2	2	3	3	2	3
$f_{\tau_7}(A)$	0	1	2	3	2	3	3	3
$f_{\tau_8}(A)$	0	1	1	2	1	2	2	2
$f_{\tau_9}(A)$	0	1	2	2	2	2	2	2

Tabla 3-9

De la tabla se obtiene la información necesaria para determinar las topologías que no son T_0: τ_1, pues $f_{\tau_1}(a) = f_{\tau_1}(b) = f_{\tau_1}(ab)$; τ_6, pues $f_{\tau_6}(b) = f_{\tau_5}(c) = f_{\tau_5}(ac)$; τ_8, pues $f_{\tau_8}(a) = f_{\tau_8}(b) = f_{\tau_8}(ab)$; τ_9, pues $f_{\tau_9}(b) = f_{\tau_9}(c) = f_{\tau_9}(bc)$.

La siguiente tabla muestra las funciones $f_{\mathcal{U}_i}$ para $i = 2,3,4,5,7$:

A	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$
$f_{\mathcal{U}_2}(A)$	0	2	2	2	3	3	3	3
$f_{\mathcal{U}_3}(A)$	0	2	1	2	3	3	2	3
$f_{\mathcal{U}_4}(A)$	0	1	1	2	2	2	2	2
$f_{\mathcal{U}_5}(A)$	0	0	2	2	2	2	3	3
$f_{\mathcal{U}_7}(A)$	0	0	1	2	1	2	2	2

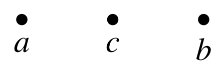
Tabla 3-10

También, se obtiene la información necesaria para describir los diagramas de Hasse de los espacios topológicos T_0, $E_i = (E, \tau_i)$, $i = 2,3,4,5,7$.

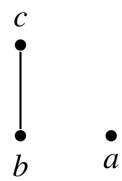
1. Obsérvense los valores de la función $f_{\mathcal{U}_2}$ y nótese que:

$$f_{\mathcal{U}_2}(a) = f_{\mathcal{U}_2}(b) = f_{\mathcal{U}_2}(c)$$

   Por lo tanto, en dicha topología, los elementos son no comparables entre sí, como consecuencia, E_2 es su propio core. Su representación gráfica es:

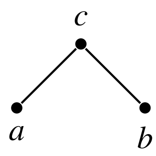


2. Obsérvense los valores de la función $f_{\mathcal{U}_3}$ y nótese que $b < c$, pues $f_{\mathcal{U}_3}(bc) = f_{\mathcal{U}_3}(c)$ y que a a su vez, no es comparable ni con b, ni con c ya que $f_{\mathcal{U}_3}(ac) = f_{\mathcal{U}_3}(ab) = 3$. Además, b es un u.b.p. pues $f_{\mathcal{U}_3}(c) - f_{\mathcal{U}_3}(b) = 1$. Luego, la representación gráfica de E_3 es:



   y removiendo a b del espacio, se obtiene que el core de E_3 es homeomorfo a:

3. Obsérvense los valores de la función $f_{\mathcal{U}_4}$ y nótese que tanto a, como b son menores que c pues $f_{\mathcal{U}_4}(ac) = f_{\mathcal{U}_3}(c) = f_{\mathcal{U}_3}(bc)$ y que a y b son no comparables. Además, a y b son u.b.p. ya que $f_{\mathcal{U}_4}(c) - f_{\mathcal{U}_4}(a) = 1$ Por lo tanto, la representación gráfica de E_4 es:



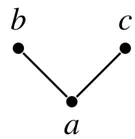
y su core es isomorfo a:

4. Para E_5, se tiene que $a < b$ y $a < c$, pues $f_{\mathcal{U}_5}(ab) = f_{\mathcal{U}_5}(b)$ y $f_{\mathcal{U}_5}(ac) = f_{\mathcal{U}_5}(c)$, además, b y c son no comparables. En este caso, no se tienen u.b.p pues $f_{\mathcal{U}_5}(b) - f_{\mathcal{U}_5}(a) \neq 1$ y $f_{\mathcal{U}_5}(c) - f_{\mathcal{U}_5}(a) \neq 1$, así pues, es necesario calcular la función $f_{\mathcal{D}}$, por el algoritmo 2, se tiene:

A	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$
$f_{\mathcal{D}_5}(A)$	0	2	1	1	2	2	2	2

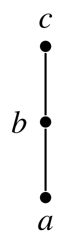
De dicha tabla se observa que tanto b como c son d.b.p.

La representación de E_5 es:



Y su core es homeomorfo a:

5. De forma similar a lo hecho para los espacios que se acaban de estudiar, de la tabla se observa que $a < b < c$, así que, el diagrama de Hasse de E_7 es:



Además, su core es homeomorfo a:

3.3.2. Espacios de 4 elementos

Las topologías no homeomorfas que se pueden definir en $E = \{a,b,c,d\}$ son las siguientes:

$\tau_1 = \{\varnothing, \{a,b,c,d\}\}$
$\tau_2 = 2^E$
$\tau_3 = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$
$\tau_4 = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,b,c,d\}\}$
$\tau_5 = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$
$\tau_6 = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, \{a,b,c,d\}\}$
$\tau_7 = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,b,c,d\}\}$
$\tau_8 = \{\varnothing, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$
$\tau_9 = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,b,c,d\}\}$
$\tau_{10} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{b,c\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$
$\tau_{11} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$
$\tau_{12} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}, \{a,b,c,d\}\}$
$\tau_{13} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,b,c,d\}\}$
$\tau_{14} = \{\varnothing, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,b,c,d\}\}$
$\tau_{15} = \{\varnothing, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}, \{a,b,c,d\}\}$
$\tau_{16} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}, \{a,b,c,d\}\}$
$\tau_{17} = \{\varnothing, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,b,c,d\}\}$
$\tau_{18} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$
$\tau_{19} = \{\varnothing, \{a\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$
$\tau_{20} = \{\varnothing, \{a\}, \{c,d\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$
$\tau_{21} = \{\varnothing, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}, \{a,b,c,d\}\}$
$\tau_{22} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,b,c,d\}\}$
$\tau_{23} = \{\varnothing, \{a\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, \{a,b,c,d\}\}$
$\tau_{24} = \{\varnothing, \{a,b\}, \{d,c\}, \{a,b,c\}, \{a,b,c,d\}\}$
$\tau_{25} = \{\varnothing, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$
$\tau_{26} = \{\varnothing, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c,d\}\}$
$\tau_{27} = \{\varnothing, \{a,b\}, \{a,b,c\}, \{a,b,c,d\}\}$
$\tau_{28} = \{\varnothing, \{a\}, \{a,b,c\}, \{a,b,c,d\}\}$
$\tau_{29} = \{\varnothing, \{a\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$
$\tau_{30} = \{\varnothing, \{a,b\}, \{c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$
$\tau_{31} = \{\varnothing, \{a\}, \{a,b,c,d\}\}$
$\tau_{32} = \{\varnothing, \{a,b,c\}, \{a,b,c,d\}\}$
$\tau_{33} = \{\varnothing, \{a,b\}, \{a,b,c,d\}\}$

Como ya se ha mencionó, basta considerar los valores de función f_{τ_i}, de los conjuntos unitarios y los de dos elementos:

A	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{d\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,d\}$	$\{b,c\}$	$\{b,d\}$	$\{c,d\}$
$f_{\tau_1}(A)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$f_{\tau_2}(A)$	8	8	8	8	12	12	12	12	12	12
$f_{\tau_3}(A)$	6	6	4	8	9	8	10	8	10	8
$f_{\tau_4}(A)$	4	4	5	8	6	7	8	7	8	9
$f_{\tau_5}(A)$	5	2	6	6	6	8	8	6	6	8
$f_{\tau_6}(A)$	4	4	4	8	6	6	8	6	8	8
$f_{\tau_7}(A)$	3	3	6	6	5	6	7	7	6	8
$f_{\tau_8}(A)$	1	5	5	5	5	5	5	7	7	7
$f_{\tau_9}(A)$	3	2	6	5	4	6	6	6	5	7
$f_{\tau_{10}}(A)$	4	2	4	6	5	6	7	4	6	6
$f_{\tau_{11}}(A)$	4	4	4	4	6	6	6	6	6	4
$f_{\tau_{12}}(A)$	2	3	4	6	4	4	6	5	6	6
$f_{\tau_{13}}(A)$	2	2	5	5	3	5	5	5	5	6
$f_{\tau_{14}}(A)$	1	3	4	5	3	4	5	5	5	6
$f_{\tau_{15}}(A)$	1	3	3	5	3	3	5	4	5	5
$f_{\tau_{16}}(A)$	2	2	4	5	3	4	5	4	5	5
$f_{\tau_{17}}(A)$	1	2	4	4	2	4	4	4	4	5
$f_{\tau_{18}}(A)$	2	3	4	4	4	4	4	5	5	4
$f_{\tau_{19}}(A)$	3	2	2	4	4	4	5	2	4	4
$f_{\tau_{20}}(A)$	2	4	3	3	4	4	4	5	5	3
$f_{\tau_{21}}(A)$	1	2	3	4	2	3	4	3	4	4
$f_{\tau_{22}}(A)$	2	2	4	4	3	4	4	4	4	4
$f_{\tau_{23}}(A)$	2	2	2	4	3	3	4	2	4	4
$f_{\tau_{24}}(A)$	2	2	2	3	2	3	4	3	4	3
$f_{\tau_{25}}(A)$	1	2	3	3	3	3	3	4	4	3
$f_{\tau_{26}}(A)$	1	2	3	3	2	3	3	3	3	3
$f_{\tau_{27}}(A)$	1	1	2	3	1	2	3	2	3	3
$f_{\tau_{28}}(A)$	1	2	2	3	2	2	3	2	3	3
$f_{\tau_{29}}(A)$	2	2	2	2	3	3	3	2	2	2
$f_{\tau_{30}}(A)$	2	2	2	2	2	3	3	3	3	2
$f_{\tau_{31}}(A)$	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
$f_{\tau_{32}}(A)$	1	2	1	2	1	1	2	1	2	2
$f_{\tau_{33}}(A)$	1	1	2	2	1	2	2	2	2	2

Tabla 3-11: Funciones f_τ para los espacios de 4 elementos

Ahora bien, denotando por $E_i = (E, \tau_i)$, las siguientes son las topologías T_0 de 4 elementos no homeomorfas:

1. E_2, pues no existen elementos en este espacio, cuyos valores en la tabla sean iguales, lo que también implica que dicho espacio no tiene elementos comparables.

2. E_3, pues los únicos elementos cuyo valor por medio de f_{τ_3} coincide, son a y b, sin embargo, estos no coinciden con $f_{\tau_3}(ab)$.

3. E_4, pues los únicos elementos cuyo valor por medio de f_{τ_4} coincide, son a y b, sin embargo, estos no coinciden con $f_{\tau_4}(ab)$.

4. E_5, pues los únicos elementos cuyo valor por medio de f_{τ_3} coincide, son c y d, sin embargo, estos no coinciden con $f_{\tau_5}(cd)$.

5. E_6, pues aunque los valores de a, b, c coinciden, éstos no son iguales ninguno de los siguientes: $f_{\tau_6}(ab)$, $f_{\tau_6}(ac)$ $f_{\tau_6}(bc)$.

6. E_7, pues $f_{\tau_7}(a) = f_{\tau_7}(b) \neq f_{\tau_7}(ab)$, $f_{\tau_7}(c) = f_{\tau_7}(d) \neq f_{\tau_7}(cd)$ y $f_{\tau_7}(a) \neq f_{\tau_7}(c)$.

7. E_8, lo que se prueba usando un argumento similar al considerado para E_7, pero tomando los elementos b, c, d.

8. E_9, pues $f_{\tau_9}(a) \neq f_{\tau_9}(b) \neq f_{\tau_9}(c) \neq f_{\tau_9}(d)$.

9. E_{10}, pues los únicos elementos cuyo valor por medio de $f_{\tau_{10}}$ coincide, son a y c, sin embargo, estos no coinciden con $f_{\tau_{10}}(ac)$.

10. E_{12}, pues $f_{\tau_{12}}(a) \neq f_{\tau_{12}}(b) \neq f_{\tau_{12}}(c) \neq f_{\tau_{12}}(d)$.

11. E_{13}, pues $f_{\tau_{13}}(a) = f_{\tau_{13}}(b) \neq f_{\tau_{13}}(ab)$, $f_{\tau_{13}}(c) = f_{\tau_{13}}(d) \neq f_{\tau_{13}}(cd)$ y $f_{\tau_{13}}(a) \neq f_{\tau_{13}}(c)$.

12. E_{14}, pues $f_{\tau_{14}}(a) \neq f_{\tau_{14}}(b) \neq f_{\tau_{14}}(c) \neq f_{\tau_{14}}(d)$.

13. E_{15}, pues los únicos elementos cuyo valor por medio de $f_{\tau_{15}}$ coincide, son b y c, sin embargo, estos no coinciden con $f_{\tau_{15}}(bc)$.

14. E_{16}, pues los únicos elementos cuyo valor por medio de $f_{\tau_{16}}$ coincide, son a y b, sin embargo, estos no coinciden con $f_{\tau_{16}}(ab)$.

15. E_{17}, lo que se prueba usando un argumento similar al considerado para E_{16}, pero tomando los elementos c y d.

16. E_{21}, pues $f_{\tau_{21}}(a) \neq f_{\tau_{21}}(b) \neq f_{\tau_{21}}(c) \neq f_{\tau_{21}}(d)$.

A	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{d\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,d\}$	$\{b,c\}$	$\{b,d\}$	$\{c,d\}$
$f_{\mathcal{U}_2}(A)$	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4
$f_{\mathcal{U}_3}(A)$	3	3	2	3	4	4	4	4	4	3
$f_{\mathcal{U}_4}(A)$	2	2	3	3	3	4	3	3	3	4
$f_{\mathcal{U}_5}(A)$	3	1	3	3	4	4	4	2	2	4
$f_{\mathcal{U}_6}(A)$	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3
$f_{\mathcal{U}_7}(A)$	2	2	3	3	4	3	4	4	3	4
$f_{\mathcal{U}_8}(A)$	0	3	3	3	3	3	3	4	4	4
$f_{\mathcal{U}_9}(A)$	2	1	3	3	3	4	3	3	3	4
$f_{\mathcal{U}_{10}}(A)$	3	1	2	3	4	4	4	2	3	3
$f_{\mathcal{U}_{12}}(A)$	1	2	2	3	3	2	3	3	3	3
$f_{\mathcal{U}_{13}}(A)$	1	1	3	3	2	3	3	3	3	4
$f_{\mathcal{U}_{14}}(A)$	0	2	3	3	2	3	3	4	3	4
$f_{\mathcal{U}_{15}}(A)$	0	2	2	3	2	2	3	3	3	3
$f_{\mathcal{U}_{16}}(A)$	1	1	2	3	2	2	3	2	3	3
$f_{\mathcal{U}_{17}}(A)$	0	1	3	3	1	3	3	3	3	4
$f_{\mathcal{U}_{21}}(A)$	0	1	2	3	1	2	3	2	3	3

Tabla 3-12: Funciones $f_{\mathcal{U}}$ para los espacios de 4 elementos

De la tabla 3-4 es posible encontrar los grafos asociados a las topologías T_0 sobre el conjunto $\{a,b,c,d\}$. Además, con la ayuda del algoritmo 3, es posible verificar la validez de las siguientes tablas que muestran sus cores respectivos:

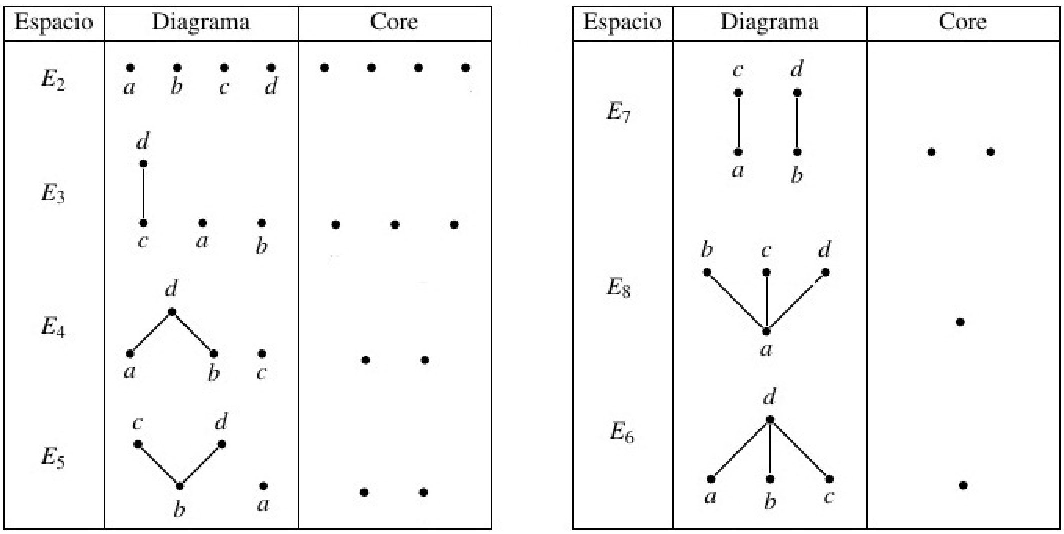


Figura 3-6: Posets de 4 elementos y sus cores

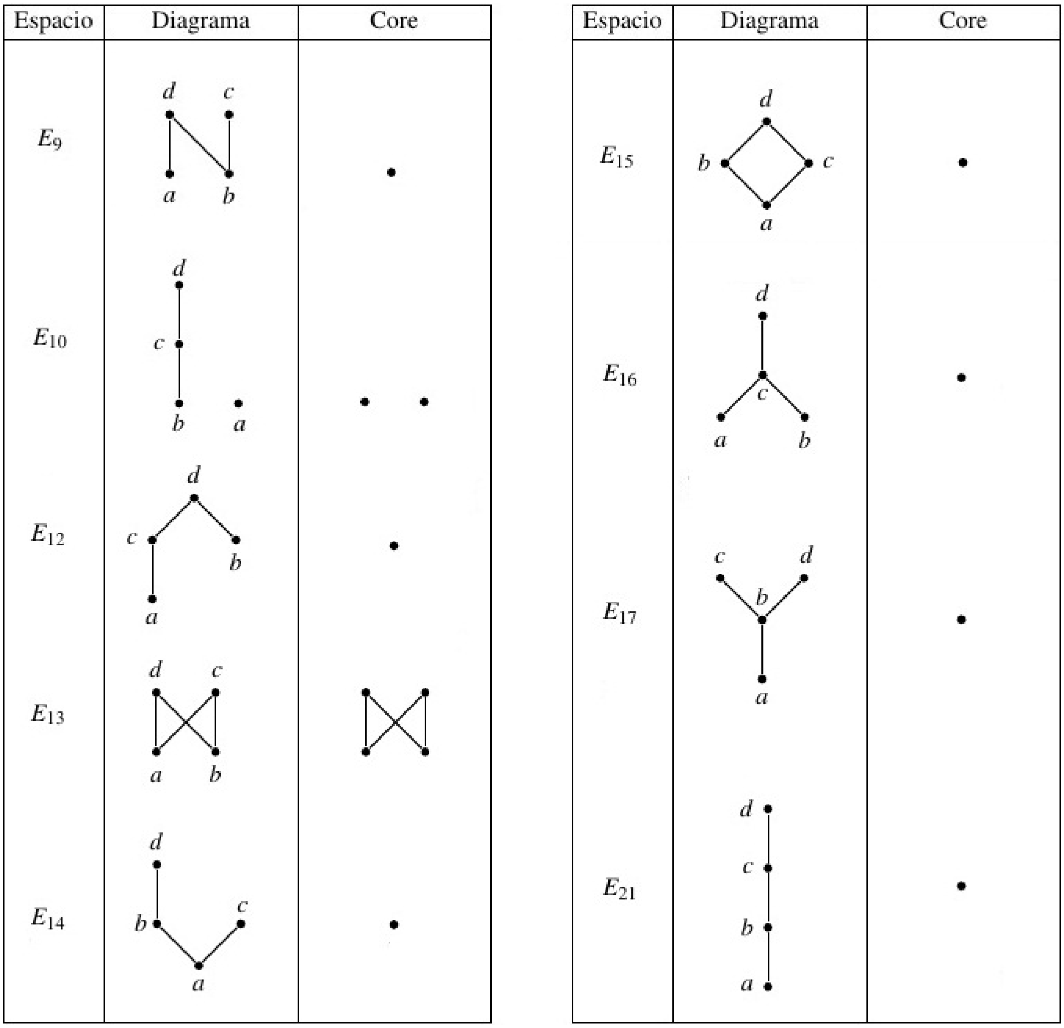


Figura 3-7: Posets de 4 elementos y sus cores

Capítulo 4

Conclusiones y recomendaciones

4.1. Conclusiones

En el desarrollo de este trabajo, se estudia una estructura que generaliza la noción de espacio topológico, denominada espacio pretopológico, concepto concebido de forma similar a lo descrito en [3], y se demuestra, que en el contexto de los espacios finitos, existe una correspondencia biunívoca entre estas estructuras y las FD relaciones con soporte finito, las cuales son conocidas como bases de datos relacionales en la teoría de bases de datos, por medio de lo cual, se permite pensar en las bases de datos como una estructura matemática, y asociarles algunos conceptos pretopológicos: punto interior, punto adherente, conjunto abierto, conjunto cerrado, función continua de un espacio pretopológico finito en otro, espacio conexo y espacio T_0. Por último, se logra estudiar la conexión entre las FD relaciones asociadas a topologías y los preórdenes, con el fin de caracterizar numéricamente, por medio de funciones submodulares, el algoritmo de Stong, el cual permite clasificar espacios finitos, por tipos de homotopía.

4.2. Recomendaciones

Durante la realización de este trabajo, surgieron algunas cuestiones que podrían considerarse en trabajos futuros.

- Caracterizar, mediante de FD relaciones y funciones submodulares, otras nociones y propiedades de espacios pretopológicos finitos.
- Encontrar otras propiedades de la función f_Δ, considerando a Δ como un conjunto asociado a otras estructuras distintas a las pretopologías, posiblemente matroides.
- Caracterizar, mediante funciones submodulares, los algoritmos de reducción de un punto, que se encuentran en el trabajo de Jonathan Barmak [2].

- Mediante funciones submodulares: encontrar pares minimales, estudiar la teoría de McCord referente a la homotopía débil, encontrar la característica de Euler de un espacio finito, bucles en diagramas de Hasse y topologías T_1, entre otros temas que se encuentran en [2].
- Detallar los algoritmos presentados, con el fin de programarlos en computador.
- Estudiar los conceptos presentados, referentes a espacios pretopológicos, por medio de las funciones y las desigualdades de la información.

Bibliografía

[1] P.S. ALEXANDROFF. *Diskrete Räume*. MathematiceskiiSbornik (N.S.) 2(1937), 501-518.

[2] BARMAK, Jonathan. *Algebraic Topology of Finite Topological Spaces and Applications.* Springer Heidelberg Dordrecht London. New York. 2011.

[3] DONADO, Alberto. *Topología y colecciones.* Universidad Pedagógica Nacional, Colombia. 1999.

[4] MATÚS, Frantisek. *Abstract functional dependency structures*. Institute of Information Theory and Automation Czechoslovak. 1991.

[5] FUJISHIGE, Satoru. *Submodular functions and optimization.* Annals of discrete mathematics. Second edition. 2005.

[6] GÓMEZ, Arley. *Funciones submodulares y algunas aplicaciones*. Tesis de maestría. Universidad Nacional de Colombia. 2011.

[7] KURATOWSKI, Kazimierz. *Introduction to set theory and topology.* English edition. 1961.

[8] J.P. MAY. *Finite topological spaces.* Notes for REU. 2003.

[9] McCord, M.C. *Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces.* Duke Mathematical Journal 33(1966), 465-474.

[10] MINIAN, Gabriel. *Espacios topológicos finitos y aplicaciones*. ECOS. 2013.

[11] ROA, Leonardo. *Una nueva construcción de los espacios topológicos finitos desde las funciones submodulares.* Tesis de maestría. Universidad Nacional de Colombia. 2012.

[12] SPANIER, E. H. *Algebraic topology*. Springer. 1966.

[13] STONG, R. E. *Finite topological spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. 1996.

[14] VARELA, Raúl. *FD relaciones.* Tesis de maestría. Universidad Nacional de Colombia. 2011.